PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 6

Pág. 200

1. Analisemos, em primeiro lugar, o que se passa com a função $f(x)=|x-3|$.

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3 & \text{se } x\geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x<3 \end{cases}$$

$$f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3-0}{x-3}=1 \text{ e}$$

$$f'(3^-)=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x+3-0}{x-3}=-1 \text{ e}$$

Logo, $f'(3^+)\neq f'(3^-)$ e portanto não existe $f(3)$.

f é derivável em *IR* \ {3}.

Considere-se agora a função:

$$s(x)=\sqrt{|x|}$$

$$s'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$s'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}$$

$$=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

A derivada de s para $x = 0$ não existe porque $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais.

s é derivável em $\mathbb{R}$ \ {0}.

Considere-se agora a função:

$$h(x)=\sqrt{x^2}$$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}: x^2\geq 0\}=\mathbb{R}$$

Dado que $h(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, a função *h* é derivável em $\mathbb{R}$ \ {0}.

Pág. 202

2.1 $f(x)=-2x+3$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-2x+3-(-2x_0+3)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-2x+3+2x_0-3}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-2x+2x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2(x-x_0)}{x-x_0}=-2$$

2.2 $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto y=-2$$

Pág. 203

3.1 $s(x) = -3$

$s'(x) = 0$, a derivada de uma função constante é igual a zero;

3.2 $t(x)=-\dfrac{1}{3}$

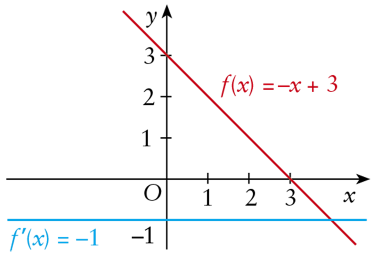
$t'(x) = 0$;

3.3 $f(x)=2\sqrt{2}$

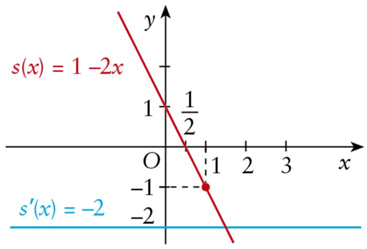
$f'(x) = 0$.

Pág. 204

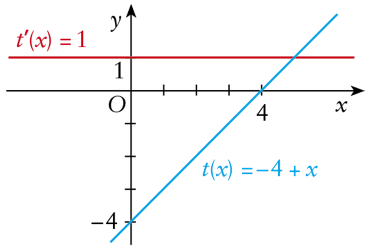
4.1



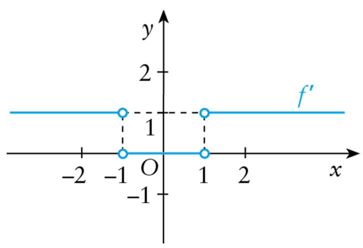
4.2



4.3



4.4



Pág. 206

5.1 $y=\dfrac{1}{x^2}$

$$y'=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3};$$

PLMM12©Porto Editora

5.2 $y=x^{\frac{1}{3}}$

$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5.3 $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$y=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y'=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

5.4 $y=-\frac{x}{2\sqrt{x}}=-\frac{x\times x^{-\frac{1}{2}}}{2}=-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}$

$y'=\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{4\sqrt{x}}$.

Pág. 207

6.1 $y=3x^2$

$y'=\left(3x^2\right)'=6x$

6.2 $y=5x^3+x^2$

$y'=\left(5x^3\right)'+\left(x^2\right)'=15x^2+2x$

6.3 $y=-2x^2+3\pi$

$y'=\left(-2x^2\right)'+(3\pi)=-4x+0=-4x$

6.4 $y=-6x^2+2x+7$

$y'=\left(-6x^2\right)'+(2x)'+(7)'=-12x+2+0$

$=-12x+2$

6.5 $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$

$y'=\left(-\frac{x^3}{3}\right)'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'+(x)'+(1)'$

$=-\frac{1}{3}\times3\times x^2+\frac{1}{2}\times2\times x+1+0$

$=-x^2+x+1$

6.6 $y=-x^4+x^3-3x^2+\frac{x}{2}+5$

$y'=\left(-x^4\right)'+\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(\frac{x}{2}\right)'+(5)'$

$=-4x^3+3x^2-6x+\frac{1}{2}$

7.1 $y=x^{\sqrt{3}}-1$

$y'=\left(x^{\sqrt{3}}\right)'-(1)'$

$y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}-0$

$y'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

7.2 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$

$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}\right)'$

$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$

$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{6\sqrt{x^3}}$

7.3 $y=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'-\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)'$

$y'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$

$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3\sqrt{x}}{4}$

7.4 $y=x\left(\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}\right)=x\sqrt{x}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}$

$=x\times x^{\frac{1}{2}}+x^2\times x^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=2x^{\frac{3}{2}}$

$y'=\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)'$

$y'=2\times\frac{3}{2}\times x^{\frac{3}{2}-1}$

$y'=3x^{\frac{1}{2}}$

$y'=3\sqrt{x}$

7.5 $y=3x^2+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-2x^{-1}=3x^2+3x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-1}$

$y'=\left(3x^2\right)'+\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)'-\left(2x^{-1}\right)'$

$y'=6x+3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times x^{-\frac{1}{2}-1}-2\times(-1)\times x^{-1-1}$

$y'=6x-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-2}$

$y'=6x-\dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}+\dfrac{2}{x^2}$

7.6 $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}+1}{x}=x+\sqrt{x}\times x^{-1}+x^{-1}$

$=x+x^{\frac{1}{2}}\times x^{-1}+x^{-1}=x+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}$

$y'=(x)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\left(x^{-1}\right)'$

$y'=1+\left(-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)+\left(-x^{-1}\right)$

$y'=1-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-x^{-2}$

$y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{x^2}$

7.7 $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^4}=x^{3-4}+x^{2-4}+x^{-4}$

$=x^{-1}+x^{-2}+x^{-4}$

$y'=\left(x^{-1}\right)'+\left(x^{-2}\right)'+\left(x^{-4}\right)'$

$y'=-x^{-1-1}-2x^{-2-1}-4x^{-4-1}$

$y'=-x^{-2}-2x^{-3}-4x^{-5}$

$y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^5}$

Pág. 209

8.1 $[x(x-1)(2x-3)]'$

$=\left[\left(x^2-x\right)(2x-3)\right]'$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções:

$\left[\left(x^2-x\right)(2x-3)\right]'$

$=\left(x^2-x\right)'(2x-3)+\left(x^2-x\right)(2x-3)'$

$=(2x-1)(2x-3)+\left(x^2-x\right)(2-0)$

$=4x^2-6x-2x+3+2x^2-2x$

$=6x^2-10x+3$

8.2 $(f\times g\times h\times j)'(x)=\left(x(4x)(3x-1)(2-3x)\right)'$

$=\left(4x^2(3x-1)(2-3x)\right)'$

$=\left(\left(12x^3-4x^2\right)(2-3x)\right)'$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções:

$\left(\left(12x^3-4x^2\right)(2-3x)\right)'$

$=\left(12x^3-4x^2\right)'(2-3x)+\left(12x^3-4x^2\right)(2-3x)'$

$=\left(36x^2-8x\right)(2-3x)+\left(12x^3-4x^2\right)(0-3)$

$=72x^2-108x^3-16x+24x^2-36x^3+12x^2$

$=-144x^3+108x^2-16x$

Logo, $(f\times g\times h\times j)'(0)$

$=-144\times0^3+108\times0^2-16\times0=0$

Pág. 210

9.1 $y=\dfrac{1}{x+3}$,

$y'=\dfrac{(1)'(x+3)-1\times(x+3)'}{(x+3)^2}=x^{3-4}+x^{2-4}+x^{-4}$

$y'=\dfrac{0-1}{(x+3)^2}$ $\qquad y'=\dfrac{-1}{(x+3)^2}$

9.2 $y=\dfrac{x}{2x^2+1}$

$y'=\dfrac{(x)'\left(2x^2+1\right)-x\left(2x^2+1\right)'}{\left(2x^2+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{2x^2+1-x(4x+0)}{\left(2x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x^2+1-4x^2}{\left(2x^2+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{-2x^2+1}{\left(2x^2+1\right)^2}$

9.3 $y=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

$y'=\dfrac{(x)'\left(x^2+2x+1\right)-x\left(x^2+2x+1\right)'}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{x^2+2x+1-x(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

$y'=\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{\left[(x+1)^2\right]^2}$

$y'=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$

9.4 $y=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$

$$y'=\frac{(2x+3)'(x^2-1)-(2x+3)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$y'=\frac{2(x^2-1)-(2x+3)\times 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'=\frac{2x^2-2-4x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'=\frac{-2x^2-6x-2}{(x^2-1)^2}$$

9.5 $y=\dfrac{x^2+1}{1-3x^3}$

$$y'=\frac{(x^2+1)'(1-3x^3)-(x^2+1)(1-3x^3)'}{(1-3x^3)^2}$$

$$y'=\frac{2x(1-3x^3)-(x^2+1)(-9x^2)}{(1-3x^3)^2}$$

$$y'=\frac{2x-6x^4+9x^4+9x^2}{(1-3x^3)^2}$$

$$y'=\frac{3x^4+9x^2+2x}{(1-3x^3)^2}$$

9.6 $y=\dfrac{x^2+2x+\pi}{1-\dfrac{x^2}{2}}$

$$y=\frac{(x^2+2x+\pi)'\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)-(x^2+2x+\pi)\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)'}{\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$y=\frac{(2x+2)\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)-(x^2+2x+\pi)(-x)}{\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$y=\frac{2x-x^3+2-x^2+x^3+2x^2+\pi x}{\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$y'=\frac{x^2+2x+\pi x+2}{1-\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$$

Pág. 211

10.1 $y=(-2x+1)^5$

$$y'=5(-2x+1)^4(-2x+1)'$$

$$y'=5(-2x+1)^4(-2)$$

$$y'=-10(-2x+1)^4$$

10.2 $y=(-x^2+3)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}(-x^2+3)^{\frac{1}{2}-1}(-x^2+3)'$$

$$y'=\frac{1}{2}(-x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{(-x^2+3)}}$$

10.3 $y=\sqrt[3]{-x^3+2}=(-x^3+2)^{\frac{1}{3}}$

$$y'=\frac{1}{3}(-x^3+2)^{\frac{1}{3}-1}(-x^3+2)'$$

$$y'=\frac{1}{3}(-x^3+2)^{-\frac{2}{3}}(-3x^2)$$

$$y'=\frac{-x^2}{\sqrt{(-x^2+2)^2}}$$

10.4 $y=\dfrac{(x-2)^2}{x}$

$$y'=\frac{\left[(x-2)^2\right]'x-(x-2)^2(x)'}{x^2}$$

$$y'=\frac{2(x-2)(x-2)'x-(x-2)^2}{x^2}$$

$$y'=\frac{2x^2-4x-(x^2-4x+4)}{x^2}$$

$$y'=\frac{x^2-4}{x^2}$$

10.5 $y=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

$$y'=\frac{\left[(x-3)^2\right]'(x+3)-(x-3)^2(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$y'=\frac{2(x-3)(x-3)'(x+3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}$$

$$y'=\frac{(2x-6)(x+3)-(x-3)^2}{(x+3)^2}$$

$$y'=\frac{2x^2+6x-6x-18-x^2+6x-9}{(x+3)^2}$$

$$y'=\frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2}$$

10.6 $y=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)'$$

$$y'=3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$y'=3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\left(\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}\right)$$

$$y'=3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)$$

$$y'=\frac{-3(x-1)^2}{(x-2)^4}$$

10.7 $y=\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}\right)^3$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)'$$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)^2\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'x-\left(\sqrt{x+1}\right)(x)'}{x^2}$$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\frac{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'x-\left(\sqrt{x+1}\right)}{x^2}$$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}(x+1)'x-\sqrt{x+1}}{x^2}\right)$$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}}{x^2}\right)$$

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\left(\frac{x}{2x^2\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\right)$$

$$y'=\frac{1}{x^2}\frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)x^2}{x^3}$$

$$y'=\frac{-x-2}{x^3}$$

10.8 $y=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)'$$

$$y'=3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^2\left(\frac{(x)'\left(\sqrt{x}+1\right)-x\left(\sqrt{x}+1\right)'}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)$$

$$y'=3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^2\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)-x\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)'}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)$$

$$y'=3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}+1-x\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)$$

$$y'=3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}+1-\dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)$$

$$y'=\frac{3x^2\sqrt{x}+3x^2-\dfrac{3x^3}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^4}$$

$$y'=\frac{3x^2\left(x+2\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^4}$$

10.9 $y=\left(\dfrac{(2x-1)^2}{x+3}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{(2x-1)^2}{x+3}\right)^2\left(\frac{(2x-1)^2}{x+3}\right)'$$

$$y'=3\left(\frac{(2x-1)^2}{x+3}\right)^2\left[\frac{\left[(2x-1)^2\right]'(x+3)-(2x-1)^2(x+3)'}{(x+3)^2}\right]$$

$$y'=3\left(\frac{(2x-1)^2}{x+3}\right)^2\left[\frac{2(2x-1)(2x-1)'(x+3)-(2x-1)^2}{(x+3)^2}\right]$$

$$y'=3\left(\frac{(2x-1)^2}{x+3}\right)^2\left[\frac{4(2x-1)(x+3)-(2x-1)^2}{(x+3)^2}\right]$$

$$y'=\frac{12(2x-1)^5(x-3)}{(x+3)^4}-\frac{3(2x-1)^6}{(x+3)^4}$$

$$y'=\frac{12(2x-1)^5}{(x+3)^3}-\frac{3(2x-1)^6}{(x+3)^4}$$

$$y'=\frac{(2x-1)^5(6x+39)}{(x+3)^4}$$

Pág. 212

11.1 $y=e^{-\frac{x}{3}}$

$y'=\left(-\frac{x}{3}\right)'e^{-\frac{x}{3}}$

$y'=-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$

11.2 $y=e^{-x+\frac{1}{3}}$

$y'=\left(-x+\frac{1}{3}\right)'e^{-x+\frac{1}{3}}$

$y'=-e^{-x+\frac{1}{3}}$

Pág. 213

12.1 $y=3^{-\frac{1}{x}}$

$y'=(\ln 3)\left(-\frac{1}{x}\right)'3^{-\frac{1}{x}}$

$y'=(\ln 3)\left(\frac{1}{x^2}\right)3^{-\frac{1}{x}}$

$y'=\frac{3^{-\frac{1}{x}}\times\ln 3}{x^2}$

12.2 $y=2^{-x^2+\frac{1}{x}}$

$y'=(\ln 2)\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)'\times 2^{-x^2+\frac{1}{x}}$

$y'=(\ln 2)\left(-2x-\frac{1}{x^2}\right)\times 2^{-x^2+\frac{1}{x}}$

Pág. 214

13.1 $y=\ln(3x)$

$y'=\frac{(3x)'}{3x}=\frac{3}{3x}$

$y'=\frac{1}{x}$

13.2 $y=\ln(-3x)$

$y'=\frac{(-3x)'}{-3x}=\frac{-3}{-3x}$

$y'=\frac{1}{x}$

13.3 $y=\ln|3x|=\begin{cases}\ln(3x) & \text{se } x>0\\ \ln(-3x) & \text{se } x<0\end{cases}$

Se $x>0$

$y'=\frac{(3x)'}{3x}=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$

Se $x<0$

$y'=\frac{(-3x)'}{-3x}=\frac{-3}{-3x}=\frac{1}{x}$

$y'=\frac{1}{x}$

Pág. 215

14.1 $y=\log_3(x^2-3)$

$y'=\frac{(x^2-3)'}{(x^2-3)\times\ln 3}$

$y'=\frac{2x}{(x^2-3)\times\ln 3}$

14.2 $y=\log_2(\sqrt{x})=\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$y'=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{x^{\frac{1}{2}}\times\ln 2}=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}{x^{\frac{1}{2}}\times\ln 2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{x}\times\ln 2}$

$y'=\frac{1}{2x\times\ln 2}$

14.3 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)$

$y'=\frac{\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)'}{\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)\times\ln\frac{1}{2}}$

$y'=\frac{\frac{(-3)'(x^2-1)-(-3)(x^2-1)'}{(x^2-1)}}{\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)\times\ln\frac{1}{2}}$

$y'=\frac{\frac{6x}{(x^2-1)}}{\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)\times\ln\frac{1}{2}}$

$y'=\frac{\frac{6x}{(x^2-1)^2}}{\frac{3}{x^2-1}\times\ln 2}$

$y'=\frac{6x(x^2-1)}{3\ln 2(x^2-1)^2}$

$y'=\frac{2x}{\ln 2(x^2-1)}$

Pág. 216

15.1 $y=\sin(-3x+1)$

$y'=(-3x+1)'\cos(-3x+1)$

$y'=-3\cos(-3x+1)$

15.2 $y=\sin^5(3x)$

$y'=5\sin^4(3x)(3x)'\cos(3x)$

$y'=5\sin^4(3x)3\cos(3x)$

$y'=15\sin^4(3x)\cos(3x)$

15.3 $y=3\sin^2(x+1)$

$y'=3\times 2\sin(x+1)(x+1)'\cos(x+1)$

$y'=6\sin(x+1)\times 1\times\cos(x+1)$

$y'=6\sin(x+1)\cos(x+1)$

15.4 $y=3\sin(x+1)^2$

$y'=3\left[(x+1)^2\right]'\cos(x+1)^2$

$y'=3\times 2(x+1)(x+1)'\cos(x+1)^2$

$y'=3\times 2(x+1)\times 1\times\cos(x+1)^2$

$y'=6(x+1)\cos(x+1)^2$

15.5 $y=x\sin x^3+2\sin(3x)$

$y'=x'\sin x^3+x\left[\sin x^3\right]'+2\left[\sin(3x)\right]'$

$y'=1\times\sin x^3+x(x^3)'\cos x^3+2(3x)'\cos(3x)$

$y'=\sin x^3+x3x^2\cos x^3+2\times 3\cos(3x)$

$y'=\sin x^3+3x^3\cos x^3+6\cos(3x)$

16.1 $y=\cos(5x^2-7)$

$y'=-(5x^2-7)'\sin(5x^2-7)$

$y'=-(10x-0)\sin(5x^2-7)$

$y'=-10x\sin(5x^2-7)$

16.2 $y=-\cos^2 x$

$y'=-\left[2\cos x(\cos x)'\right]$

$y'=-\left[2\cos x(-\sin x)\right]$

$y'=2\cos x\sin x$

$y'=\sin(2x)$

16.3 $y=-\cos^3(x^3)$

$y'=-3\cos^2(x^3)\left[\cos(x^3)\right]'$

$y'=-3\cos^2(x^3)(x^3)'\left(-\sin(x^3)\right)'$

$y'=9x^2\cos^2(x^3)\sin(x^3)$

16.4 $y=\sin x\cos x$

$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)'$

$y'=\cos^2 x-\sin' x$

$y'=\cos(2x)$

16.5 $y=3\cos(x-3)^2+\sin^2(x-3)$

$y'=3\left[\cos(x-3)^2\right]'+2\sin(x-3)\left[\sin(x-3)\right]'$

$y'=3\times\left[(x-3)^2\right]'-\left[\sin(x-3)^2\right]+$

$+2\sin(x-3)(x-3)'\cos(x-3)$

$y'=-6(x-3)\sin(x-3)^2+2\sin(x-3)\cos(x-3)$

Pág. 217

17.1 A velocidade, v, é a derivada da função s.

$v(t)=\dfrac{d}{dt}(-4{,}9t^2+2t+5)$

$v(t)=-9{,}8\,t+2$

17.2 A aceleração, a, é a derivada da velocidade.

$a(t)=\dfrac{d}{dt}(-9{,}8t+2)$

$a(t)=-9{,}8$

17.3 $v(3)=-9{,}8\times 3+2$

$v(3)=-27{,}4$ m/s

$a(3)=-9{,}8$ m/s^2

Pág. 218

1. O declive da recta r é igual a $m=h'(0)$.

Assim, $h'(x)=\left(-2+2\ln(x+1)\right)'$

$h'(x)=2\times\dfrac{(x+1)'}{x+1}$

$h'(x)=\dfrac{2}{x+1}$

Logo, $h'(0)=\dfrac{2}{0+1}=2$

Resposta correcta: **(D)**.

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2+x-6}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+3}=f'(2)\times\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{2}$

Resposta correcta: **(D)**.

3. A função velocidade é a derivada da função *h*, assim:

$v(t)=\dfrac{d}{dt}(220t-5t^2)$

v (*t*) = 220 – 10 *t*;

Logo, *v* (10) = 220 – 10 × 10

v (10) = 120

Resposta correcta: **(A)**.

4. $f(x)=x^{\pi-e}$

$f'(x)=(\pi-e)x^{\pi-e-1}$

$f'(x)=(\pi-e)x^{\pi-(e+1)}$

Resposta correcta: **(C)**.

5. $f(x)=-g(x)-1$

$f'(x)=-g'(x)$

Resposta correcta: **(D)**.

6. Vamos determinar uma equação da recta *t*:

$y=mx+b$

$m=\dfrac{0-3}{-2-2}=\dfrac{3}{4}$ substituindo na equação:

$y=\dfrac{3}{4}x+b$ e como o ponto (– 2, 0) pertence à recta *t*:

$0=\dfrac{3}{4}\times(-2)+b\Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}$

Logo, $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}$ e $f'(2)=\dfrac{3}{4}$.

Vamos averiguar qual das opções verifica esta condição:

(A) $f'(x)=1-\dfrac{x}{8}$

$f'(2)=1-\dfrac{2}{8}=\dfrac{3}{4}$.

Resposta correcta: **(A)**.

Pág. 219

1.1 Equação da recta *r*: $y=-4x+7$.

O declive desta recta é – 4.

A recta *s* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* de abcissa $\dfrac{17}{4}$, daí que o declive desta recta é $f'\left(\dfrac{17}{4}\right)$.

Como as rectas, *r* e *s*, são perpendiculares, vem:

$-4\times f'\left(\dfrac{17}{4}\right)=-1$, relação entre os declives de duas rectas perpendiculares.

Donde, $f'\left(\dfrac{17}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

1.2 $y-y_1=m(x-x_1)$, onde $x_1=\dfrac{17}{4}$; $y_1=3$ e $m=f'\left(\dfrac{17}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Substituindo na equação, vem:

$y-3=\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{17}{4}\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{17}{16}+3$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{31}{16}$

2.1 $f'(a)$ é igual ao valor do declive da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa a, isto é, ao declive da recta *t*:

$f'(a)=\dfrac{3-0}{0-(-5)}=\dfrac{3}{5}$

2.2 Seja *s* a recta que passa pelo ponto de coordenadas (4, 0) e é perpendicular à recta *t*, então:

$s:y=mx+b$, onde $m=-\dfrac{5}{3}$ (relação entre os declives de duas rectas perpendiculares).

Como (4, 0), pertence à recta *s*, vem:

$0=-\dfrac{5}{3}\times4+b\Leftrightarrow b=\dfrac{20}{3}$

Logo, $s:y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

3.1 $y-y_1=m(x-x_1)$, onde:

$x_1=-1$;

$f(x_1)=f(-1)=0$

$m=f'(x_1)=f'=\dfrac{1+\ln(-1+2)}{-1+2}=1$.

Substituindo na equação, temos:

$y-0=1(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$.

3.2 Sim, pois toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

3.3 $f''(x)=\left(\dfrac{1+\ln(x+2)}{x+2}\right)'$

$=\dfrac{(1+\ln(x+2))'(x+2)-(1+\ln(x+2)(x+2))'}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{x+2}(x+2)-(1+\ln(x+2))\times 1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{1-1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}=\dfrac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}$

Daí que $f''(2)=-\dfrac{\ln(2+2)}{(2+2)^2}=-\dfrac{\ln(4)}{16}$

$=-\dfrac{\ln(2^2)}{16}=\dfrac{2\ln(2)}{16}=-\dfrac{\ln(2)}{8}$

4.1 $Q(t)=A\times e^{-Bt}, t\geq 0$

$Q(0)=A\times e^{-B\times 0t}=A$

Significado: Inicialmente, isto é, para t = 0, a quantidade de qualquer substância radioativa é igual a A.

4.2 O gráfico de Q tem uma assimptota horizontal se:

$\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)=a$, com $a\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} A\times e^{-Bt}=0$, pois

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-Bt}=0$

Daí que y = 0 é uma assimptota horizontal do gráfico de Q.
Significado: com o decorrer do tempo a quantidade Q, de qualquer substância radioativa tende a ser igual a zero.

4.3 $Q'(t)=-ABe^{-Bt}, t\geq 0$

Q e Q' são directamente proporcionais se $\dfrac{Q(t)}{Q'(t)}$ for constante.

$\dfrac{Q(t)}{Q'(t)}=\dfrac{A\times e^{Bt}}{-ABe^{-Bt}}=-\dfrac{1}{B}$, logo Q e Q' são directamente proporcionais.

4.4 $Q(t)=\dfrac{1}{2}Q(0)\Leftrightarrow A\times e^{-Bt}\dfrac{1}{2}Ae^{0}$

$\Leftrightarrow A\times e^{-Bt}\dfrac{1}{2}A$

$\Leftrightarrow e^{-Bt}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -Bt=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -Bt=-\ln 2$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 2}{B}$ c. q. m.

4.5 $\Leftrightarrow\begin{cases}Q(0)=200\\Q(10)=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^{0}=200\\Ae^{-10B}=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\e^{-10B}=\dfrac{50}{200}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\e^{-10B}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\-10B=\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\-10B=-\ln 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\B=\dfrac{\ln(2^2)}{10}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\B=\dfrac{2\ln(2)}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=200\\B=\dfrac{\ln(2)}{5}\end{cases}$

Pág. 221

1.1 Se $f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$ num intervalo E, para todos os números reais b e c de E, se b < c então $f(b)\geq f(c)$ e $f(b)\leq f(c)$, dado que $f(b)=f(c)=a$.

1.2 **a)** $[a, b]$
b) $[a, b]$ e $[c, d]$
c) $[d, e]$
d) $[b, c]$

Pág. 224

2.1. $f(x)=5-6x^2-2x$

$f'(x)=-12x-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -12x-2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{6}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{1}{6}\right)$	↘

Assim, f é estritamente crescente em $\left]-\infty,-\dfrac{1}{6}\right]$

e estritamente decrescente em $\left[-\dfrac{1}{6},+\infty\right[$.

2.2. $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(0)$ não existe

Sinal de *f'* e monotonia de *f*:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$

Assim, *f* é estritamente crescente em $]-\infty,0]$

e estritamente decrescente em $[0,+\infty[$.

2.3. $f(x)=xe^{-x}$

$f'(x)=(xe^{-x})'$

$f'(x)=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}=0 \vee 1-x=0$

$\Leftrightarrow e^{x}=0 \vee x=1$

equação impossível, pois $e^{x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

Assim, *f* é estritamente crescente em $]-\infty,1]$

e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

2.4. $f(x)=x\ln(x)$; $D_f=\mathbb{R}^+$

$f'(x)=(x\ln(x))'$

$f'(x)=(x)'\ln(x)+x(\ln(x))'$

$f'(x)=\ln(x)+x\frac{1}{x}$

$f'(x)=\ln(x)+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)+1=0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$

Assim, *f* é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$

e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Pág. 226

3.1. $f(x)=3x^2-10x+7$ em [–1, 4]

$f'(x)=6x-10$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

Como a derivada existe para $x\in\mathbb{R}$, os únicos pontos críticos são os que anulam a função derivada, ou seja, $\frac{5}{3}$.

Calcule-se: $f\left(\frac{5}{3}\right)$, $f(-1)$ e $f(4)$

$f\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

$f(-1)=20$

$f(-4)=15$

x	-1		$\frac{5}{3}$		4
$f'(x)$	-16	$-$	0	$+$	14
$f(x)$	20	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	15

Máximo: 20

Mínimo: $-\frac{4}{3}$

3.2. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ em [0, 6[

$f'(x)=x-2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Como a derivada existe para $x\in\mathbb{R}$, os únicos pontos críticos são os que anulam a função derivada, ou seja, 2.

Calcule-se: $f(0)$ e $f(2)$

$f(0)=0$

$f(2)=-2$

x	0		2		6
$f'(x)$	– 2	–	0	+	
$f(x)$	0	↘	– 2	↗	

$\lim\limits_{x\to 6} f(x)=6>f(0)$

Máximo: não tem

Mínimo: – 2.

3.3. $f(x)=xe^{-x}$ em]– 1, e]

$f'(x)=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}=0 \vee x=1$

impossível, uma vez que $e^{-x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$

x	– 1		1		e
$f'(x)$		+	0	–	f' (e)
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	f (e)

$f(1)=1\times e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f(e)=e\times e^{-e}=\frac{e}{e^e}=e^{1-e}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-e<f(e)$

Máximo: $\frac{1}{e}$

Mínimo: não tem.

3.4. $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ em [2, e]

$f'(x)=\frac{(x)'\ln(x)-x[\ln(x)]'}{\ln^2(x)}$

$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=0$

$\Leftrightarrow \ln(x)-1=0 \wedge \ln^2(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow x=e \wedge x\neq 1$

x	2		e
$f'(x)$	$f'(2)$	–	0
$f(x)$	$\frac{2}{\ln(2)}$	↘	e

$f(2)=\frac{2}{\ln(2)}$

$f(e)=e$

Máximo: $\frac{2}{\ln(2)}$

Mínimo: e

Pág. 229

4.1. $f(x)=-x^2+3x+1$

$f'(x)=-2x+3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↘

A função tem um único extremo relativo.

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ é o máximo da função.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\times\frac{3}{2}+1=\frac{13}{4}$

4.2. $g(t)=4-20t+t^2+2t^3$

$g'(t)=-20+2t+6t^2$

$g'(t)=0 \Leftrightarrow -20+2t+6t^2=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\times(6)\times(-20)}}{2\times 6}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{484}}{12}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-2+22}{12} \vee t=\dfrac{-2-22}{12}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{20}{12} \vee t=-\dfrac{24}{12}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{3} \vee t=-2$

t	$-\infty$	-2		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	–	0	+
$g(t)$	↗	32	↘	$-\frac{467}{27}$	↗

A função g tem dois extremos relativos.

$g(-2)=32$ é o máximo da função e

$g\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{467}{27}$ é mínimo relativo da função de g.

4.3. $f(t)=t^3(t-2)=t^4-2t^3$

$f'(t)=4t^3-6t^2$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 4t^3-6t^2=0 \Leftrightarrow t^2(4t-6)=0$

$\Leftrightarrow t^2=0 \vee 4t-6=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\dfrac{3}{2}$

t	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	–	+	–	0	+
$f(t)$	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗

A função f tem um mínimo para $t=\frac{3}{2}$ e esse mínimo é:

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}-2\right)=\frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$.

4.4. $f(x)=x^2e^{-2x}$

$f'(x)=2x(e^{-2x})+x^2(-2e^{-2x})$

$f'(x)=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}$

$f'(x)=2x(e^{-2x}-xe^{-2x})$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2xe^{-2x}(x-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0 \vee e^{-2x}=0 \vee x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	0	↗	e^{-2}	↘

A função f tem dois extremos relativos.

$f(0)$ é o mínimo da função e $f(1)$ é um máximo.

Mínimo: $f(0)=0$

Máximo: $f(1)=\frac{1}{e^2}$.

4.5. $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{t}$

$f'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}\times t-\ln(t)\times 1}{t^2}$

$f'(t)=\dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln(t)}{t^2}=0$

$\Leftrightarrow 1-\ln(t)=0 \wedge t^2\neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t)=1 \wedge t\neq 0$

$\Leftrightarrow t=e$

t	0		e	$+\infty$
$f'(t)$		+	0	–
$f(t)$		↗	e^{-1}	↘

A função f tem um máximo que é $f(e)$.

Máximo: $f(e)=\frac{1}{e}$.

Pág. 232

5. $f(x)=e^x(x^2-x)$

$f'(x)=(e^x)'(x^2-x)+e^x(x^2-x)'$

$f'(x)=e^x(x^2-x)+e^x(2x-1)$

$f'(x)=e^x(x^2-x+2x-1)$

$f'(x)=e^x(x^2+x-1)$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$f''(x)=(e^x)'(x^2+x-1)+e^x(x^2+x-1)'$

$f''(x)=e^x(x^2+x-1)+e^x(2+1)$

$f''(x)=e^x(x^2+x-1+2x+1)$

$f''(x)=e^x(x^2+3x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x^2+3x)=0$

$\Leftrightarrow e^x=0 \vee x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow e^x=0 \vee x(x+3)=0$

$\Leftrightarrow e^x=0 \vee x=0 \vee x=-3$

equação impossível, pois $e^x>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$

x		-3		0	
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$	$f(-3)$	$\cap$	$f(0)$	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[-3, 0]$ e a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-3]$ e em $[0,+\infty[$.

Os pontos $(-3, f(-3))$ e $(0, f(0))$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

Pág. 233

6.1. $f'(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{2x}$

$$f''(x)=\frac{(1+\ln(x))'2x-(1+\ln(x))2(x)'}{4x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\times 2x-(1+\ln(x))\times 2}{4x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2-2-1\ln(x)}{4x^2}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(x)}{2x^2}=0$

$\Leftrightarrow -\ln(x)=0 \wedge 2x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x=1 \wedge x \neq 0$

x	0		1	
$f''(x)$		+	0	−
$f(x)$			$f(1)$	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1]$ e a concavidade voltada para baixo em $[1,+\infty[$.

O ponto $(0, f(1))$ é o ponto de inflexão do gráfico de f.

6.2. O segundo gráfico, pois -1 é zero da função e esta muda de sinal neste ponto.

Pág. 235

7. $f(x)=2x-3\ln(x);\ D_f=\mathbb{R}^+$

$f'(x)=2-3\times\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=2-\dfrac{3}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\dfrac{3}{x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x}=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

x	0		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗

O gráfico de f tem um extremo. Esse é um mínimo.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2\times\dfrac{3}{2}-3\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=3-3\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ é o mínimo de f.

Pág. 238

8. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

(i) Domínio: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(ii) Continuidade:

A função *f* é contínua no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(iii) Intersecção com os eixos:

Intersecção com o eixo *Ox*:

$$\frac{e^x}{x}=0 \Leftrightarrow e^x=0 \wedge x\neq 0$$

impossível, pois $e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Então, o gráfico de *f* não intersecta o eixo *Ox*.

Intersecção com o eixo *Oy*:

$\dfrac{e^x}{x}=y \wedge x=0$, impossível pois $D_f=IR\setminus\{0\}$.

O gráfico de *f* também não intersecta o eixo *Oy*.

(iv) Simetria: $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}$; $-f(x)=-\dfrac{e^x}{x}$

A função *f* não é par nem ímpar. O gráfico de *f* não é simétrico relativamente ao eixo *Oy* nem relativamente à origem.

(v) Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\frac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}$$

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x x-e^x}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow e^x x-e^x=0 \wedge x^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(x-1)=0 \wedge x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x=0 \vee x=1 \wedge x\neq 0$$

equação impossível, pois $e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x=1 \wedge x\neq 0$$

x		0		1	
$f'(x)$	$-$			0	+
$f(x)$	↘		↘	e	↗

A função *f* é decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0, 1]$ e crescente em $[1,+\infty[$.

$f(1)=e$. O mínimo relativo da função é *e*.

(vi) Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\frac{[e^x(x-1)]'x^2-e^x(x-1)(x^2)'}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{[(e^x)'(x-1)+e^x(x-1)']x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{(e^x(x-1)+e^x)x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(x-1)x^2+e^x x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow x^2-2x+2=0 \wedge x^3\neq 0 \quad \Leftrightarrow x\in\Phi$$

f'' não tem zeros.

$f''(x)<0$ se $x<0 \wedge f''(x)>0$ se $x>0$; então, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$ e

Não tem pontos de inflexão.

(vii) Assimptotas:

Verticais

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

A recta de equação $x=0$ é assimptota vertical (bilateral) do gráfico de *f*.

Não verticais

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty \text{ (limite notável)}$$

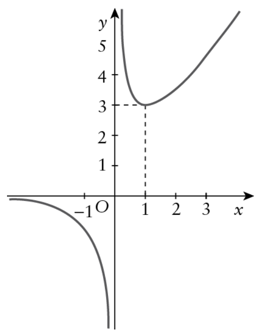
Como m não é finito, não existe assimptota não vertical do gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$$

Logo, $y=0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f*.

(viii) Contradomínio: $D'_f=]-\infty,0[\,\cup\,[e,+\infty[$.



Pág. 240

9. $f(x) = x - \ln(x)$

(i) Domínio:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

(ii) Continuidade:

A função é contínua no seu domínio.

(iii) Intersecção com os eixos:

Intersecção com o eixo *Ox*:

$x - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = x$

Com a ajuda da calculadora gráfica, verifica-se que os gráficos das funções $y_1 = \ln x$ e $y_2 = x$ não se intersectam.

Então, o gráfico de *f* não intersecta o eixo *Ox*.

Intersecção com o eixo *Oy*:

O domínio é $\mathbb{R}^+$, logo o gráfico de *f* também não intersecta o eixo *Oy*.

(iv) Simetria:

Como o domínio é $\mathbb{R}^+$, a função não é par nem ímpar.

(v) Monotonia e extremos:

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

A função *f* é decrescente em]0, 1] e crescente em $[1, +\infty[$.

$f(1) = 1$. O mínimo relativo da função *f* é 1.

(vi) Concavidades e pontos de inflexão:

$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)'$

$f''(x) = \frac{1}{x^2}$

f '' não tem zeros. $f''(x) > 0, \forall x \in D_f$. O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio. Não tem pontos de inflexão.

(vii) Assimptotas:

Verticais

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

A recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de *f*.

Não verticais

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x - \ln x}{x}\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$

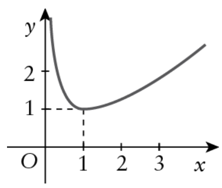
$b = \lim_{x \to -\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty}[x - \ln x - x]$

$= -\lim_{x \to -\infty} \ln x = -\infty$

Como $b \notin \mathbb{R}$, então o gráfico de *f* não tem assimptotas não verticais.

(viii) Contradomínio:

$D'_f = [1, +\infty[$



Pág. 241

10.1. **a)** $f(x) = e^{\sin x}$

$f'(x) = (\sin x)' e^{\sin x}$

$f'(x) = \cos x e^{\sin x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x e^{\sin x} = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee e^{\sin x} = 0$

equação impossível, pois $e^{\sin x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [0, 2\pi]$, vem: $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	+	0	–	0	+
$e^{\sin x}$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Por análise do quadro, facilmente se verifica que:

f tem um mínimo para $x = 0$ que é $f(0) = 1$ e tem outro para $x=\frac{3\pi}{2}$ que é $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Tem também dois máximos para $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=2\pi$, que são respetivamente, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$ e $f(2\pi)=1$.

b) O contradomínio de f é: $D'_f=\left[\frac{1}{e}, e\right[$.

10.2. **a)** $f(x)=e^x\cos x$

$$f'(x)=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$$
$$=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$$
$$=e^x\cos x-e^x\sin x$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow e^x=0\vee\cos x-\sin x=0$$

equação impossível, pois $e^x>0,\forall x\in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \cos x=\sin x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[-2\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, vem:

$$x=-\frac{7\pi}{4}\text{ e } x=-\frac{3\pi}{4}\text{ e } x=\frac{\pi}{4}\text{ e } x=\frac{5\pi}{4}.$$

x	-2π		$-\frac{7\pi}{4}$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$-\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
$e^x(\cos x-\sin x)$	+	+	0	–	0	+	0	–	0	+	+
$f(x)$	↗			↘		↗		↘		↗	

Extremos: Tem mínimos para $x = -2\pi$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ e $x=\frac{5\pi}{4}$, são respetivamente:

$$f(-2\pi)=e^{-2\pi}\cos(2\pi)=e^{-2\pi}\times 1=\frac{1}{e^{2\pi}}.$$

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{3\pi}{4}}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{\frac{5\pi}{4}}\cos\frac{5\pi}{4}=e^{\frac{5\pi}{4}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}}{2}$$

Tem máximos para $x=-\frac{7\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ e $x=\frac{3\pi}{2}$, são respetivamente:

$$f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=e^{-\frac{7\pi}{4}}\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=e^{-\frac{7\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{7\pi}{4}}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{\frac{3\pi}{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

b) Para determinar os pontos de inflexão, calcula-se a segunda derivada:

$$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$$
$$f'(x)=(e^x)'(\cos x-\sin x)+(e^x)(\cos x-\sin x)'$$
$$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$
$$=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x$$
$$=-2e^x\sin x$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -2e^x\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow -2e^x=0\vee\sin x=0$$

impossível, pois $e^x>0,\forall x\in IR$; $-2e^x<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin x=0$$
$$\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[-2\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, vem:

$$x=-2\pi, x=-\pi, x=0, x=\pi$$

x	-2π		$-\pi$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$	0	–	0	+	0	–	0	+	+
$f(x)$		∩		∪		∩		∪	

De uma análise do quadro, facilmente se verifica que o gráfico da função tem pontos de inflexão para $x = -\pi$, $x = 0$ e $x = \pi$.

Determine-se as ordenadas desses pontos:

$$f(-\pi)=e^{-\pi}\cos(-\pi)=e^{-\pi}\times(-1)=-\frac{1}{e^{\pi}}$$

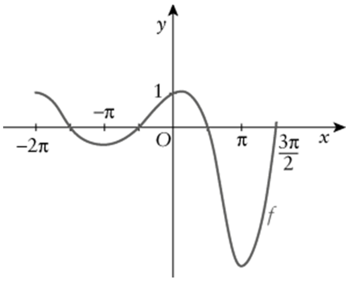
$$f(0)=e^0\cos(0)=1\times 1=1$$

$$f(\pi)=e^{\pi}\cos(\pi)=e^{\pi}\times(-1)=-e^{\pi}$$

Logo, são:

$\left(-\pi,-\frac{1}{e^{\pi}}\right)$, (0, 1) e $(\pi,-e^{\pi})$.

c) Esboço gráfico de f:



Pág. 243

11. Pretende-se determinar x de modo que a capacidade da caleira seja máxima.

A capacidade da caleira é máxima quando for máxima a área da secção rectangular de dimensões: x e $28 - 2x$.

Seja: $f(x) = x(28-2x)$

$f(x) = -2x^2 + 28x$

$f'(x) = -4x + 28$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

x	0		7	
$f'(x)$		+	0	–
$f(x)$		↗	$f(7)$	↘

A função f tem um máximo relativo para $x = 7$.

Logo, devem ser dobrados 7 cm de cada lado da folha para que a caleira tenha capacidade máxima.

Pág. 244

12. Seja:

r = raio da base do cilindro, em cm.

h = altura do cilindro, em cm.

Área da base: $A_b = \pi r^2$, em cm^2.

Área da superfície lateral: $A_l = 2\pi r \times h$, em cm^2.

Volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$, em cm^3.

Sabemos que $V = 48\pi$, em cm^3.

Então:

$$48\pi = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{48}{r^2} \text{ (em cm)}$$

O custo C em função de r é dado, em meticais, por:

$$C(r) = 2\pi r \times \frac{48}{r^2} \times \frac{2}{10\,000} + \pi r^2 \times \frac{2}{10\,000} + \pi r^2 \times \frac{3}{1000}$$

$$\Leftrightarrow C(r) = \frac{1}{10\,000}\left(\frac{192\pi}{r} + 5\pi r^2\right)$$

$$C'(r) = \frac{1}{1000}\left(10\pi r - \frac{192\pi}{r^2}\right)$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow 10\pi r - \frac{192\pi}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\pi r^3 - 192\pi}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10\pi r^3 - 192\pi = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{192\pi}{10r} \wedge r \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{19{,}2} \wedge r \neq 0$$

r	0		$\sqrt[3]{19{,}2}$	
$C'(r)$		–	0	7
$C(r)$		↘	$f\left(\sqrt[3]{19{,}2}\right)$	↗

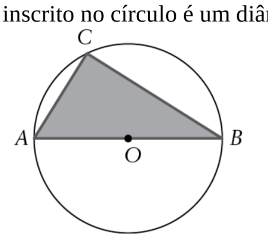
$r = \sqrt[3]{19{,}2} \approx 2{,}68$ cm

$h = \dfrac{8}{\left(\sqrt[3]{19{,}2}\right)^2} \approx 6{,}69$ cm

Logo, o custo mínimo dos materiais para construir as embalagens cilíndricas obtém-se para cilindros com 2,68 cm de raio da base e 6,69 cm de altura.

Pág. 245

13. Sabemos que a hipotenusa do triângulo rectângulo inscrito no círculo é um diâmetro.



$\overline{AB} = 20$ cm

$\overline{AC} = x$ cm

$\overline{BC} = y$ cm

A área do triângulo rectângulo é igual ao semiproduto dos catetos, ou seja:

$$A = \frac{xy}{2}$$

Mas pelo Teorema de Pitágoras, vem:

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 400$$

$y = \sqrt{400 - x^2}$ e $y > 0$, então:

$$A = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2}$$

$$A' = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{400-x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 \times \sqrt{400-x^2} + x\frac{-2}{2\sqrt{400-x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{400-x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{400-x^2}}\right)$$

$$= \frac{400-2x^2}{2\sqrt{400-x^2}}$$

$$= \frac{200-x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow 200 - x^2 = 0 \wedge \sqrt{400-x^2} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200} \wedge x \neq 20$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 10\sqrt{2} \wedge x \neq 20$$

Mas o domínio é]0, 20[: o cateto tem de ter comprimento positivo e não pode ser maior que a hipotenusa.

$$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$$

x	0		$10\sqrt{2}$		20
A'		+	0	–	
A		↗	$A\left(10\sqrt{2}\right)$	↘	

A função tem um máximo para $x = 10\sqrt{2}$.

Então, o triângulo rectângulo de área máxima inscrito num círculo de raio 10 cm tem dimensões:

$$x = 10\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2} = 10\sqrt{2}$$

Catetos: $10\sqrt{2}$ cm; hipotenusa: 20 cm.

O triângulo, quanto aos lados, classifica-se como isósceles.

Pág. 246

14.1. $f(x) = 9\left(e^{2-0,1x} + e^{0,1x-2}\right)$

$$f'(x) = 9\left[\left(e^{2-0,1x}\right)' + \left(e^{0,1x-2}\right)'\right]$$

$$= 9\left(-0,1e^{2-0,1x} + 1e^{0,1x-2}\right)$$

$$= -0,9e^{2-0,1x} + 0,9e^{0,1x-2}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,9e^{2-0,1x} + 0,9e^{0,1x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-0,1x} = e^{0,1x-2} \Leftrightarrow 2 - 0,1x = 0,1x - 2$$

$$\Leftrightarrow -0,2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{0,2} \Leftrightarrow x = 20$$

x		20	
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	$f(20)$	↗

É no ponto de abcissa 20 que é mínima a função *f*. Como a distância *A* e *B* é 40 m e 40 : 2 = 20, a distância mínima de um ponto da linha *DC* obtém-se no ponto em que a linha dista igualmente de *A* e de *B*.

14.2. $f(0) = 9\left(e^{2-0,1\times 0} + e^{0,1\times 0-2}\right) = 9\left(e^{2} + e^{-2}\right)$

$$f(40) = 9\left(e^{2-0,1\times 40} + e^{0,1/40-2}\right) = 9\left(e^{2-4} + e^{4-2}\right)$$

$$= 9\left(e^{-2} + e^{2}\right)$$

Como $f(0) = f(40)$, então $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Pág. 247

15.1. $f(x) = \ln\left(16 - x^2\right)$ $D_f =]-4,4[$

$$f'(x) = \frac{\left(16-x^2\right)'}{16-x^2} = \frac{-2x}{16-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \wedge 16 - x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq \pm 4$$

Tal como a figura sugere, é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima.

15.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(16 - x^2\right) = 0$

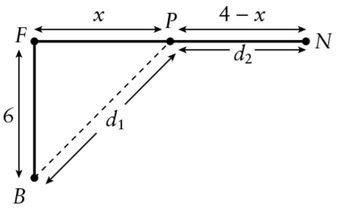
$$\Leftrightarrow 16 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{15} \vee x = \sqrt{15}$$

A distância de *A* a *B* é igual à soma dos valores absolutos dos zeros da função *f*, ou seja, $\overline{AB} = 2\sqrt{15}$.

Pág. 248

16.



De acordo com a figura, o João terá de percorrer a distância $d_1 + d_2$ no menor tempo possível.

$d_1 = \sqrt{36 + x^2}$ e $d_2 = 4 - x$

O tempo *T* de viagem é dado por:

$$T(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{5} + \frac{4-x}{6}$$

Calcule-se a derivada da função T:

$$T'(x)=\left[\frac{\left(36+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{5}\right]'+\left(\frac{4-x}{6}\right)'$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\left(36+x^2\right)^{\frac{1}{2}}2x-\frac{1}{6}=\frac{x}{5\sqrt{36+x^2}}-\frac{1}{6}$$

$$T'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{5\sqrt{36+x^2}}-\frac{1}{6}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x=5\sqrt{36+x^2}\Rightarrow 36x^2=25\left(36+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 36x^2-25x^2=900\Rightarrow 11x^2=900$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{900}{11}}\Leftrightarrow x=\pm\frac{30\sqrt{11}}{11}$$

Como $x > 0$, vem $x=\frac{30\sqrt{11}}{11}(\approx 9{,}05)$.

A única solução possível seria o João dirigir-se ao ponto P, que dista $\frac{30\sqrt{11}}{11}$ km do ponto F, e em seguida dirigir-se por terra para o ponto N.

Pág. 249

17. Pretendemos determinar o mínimo da função.

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=0$$

$$\Leftrightarrow e^x=e^{-x}\Leftrightarrow x=-x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$$

x		0	
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

A função é mínima para $x = 0$.

Assim, $f(0)=\frac{e^0+e^0}{2}=1$

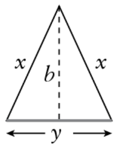
A distância mínima da rampa ao solo representado na figura pelo eixo das abcissas é igual a 1.

17.2. Se $\overline{AB} = 4$ m, então a abcissa de A é -2.

$$\overline{AD}=f(-2)=\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}.$$

Pág. 250

1.



Sabemos que $2x + y = 60$

$$\Leftrightarrow x=\frac{60-y}{2}$$

Por outro lado:

$$\text{Área}=\frac{y\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}}{2}$$

$$A=y\frac{\sqrt{\left(\frac{60-y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{y\sqrt{3600-120y}}{4}$$

A função A tem um máximo para $y = 20$, que é, aproximadamente, 173.

Resposta correcta: **(B).**

2.

$$f(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Pretendemos determinar o máximo de $f'(x)$, logo:

$$f''(x)=\frac{(x-1)'x^2-(x-1)\left(x^2\right)'}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -x^2+2x=0\wedge x^4\neq 0$$

Pretendemos estudar a função no intervalo [1, 2 e]:

x	1		2		2 e
f''	1	+	0	–	$\frac{-4e^2+4e}{16}$
f	$f'(1)$	↗	$f'(2)$	↘	$f'(2e)$

A função f' tem um máximo para $x = 2$.

Então, uma equação da recta tangente ao gráfico de f que tem declive máximo é:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y-\left(\ln(2)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\ln 2$$

Resposta correcta: **(A).**

3. Resposta correcta: **(A)**

Conclui-se que é a opção (A), efectuando a relação entre a função e a sua derivada ($f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é crescente e $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é decrescente) e a função e a sua segunda derivada ($f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico tem a concavidade voltada para cima e $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico tem a concavidade voltada para baixo).

4. Resposta correcta: **(D).**

Sendo $\mathbb{R}$ o domínio de *f*, *c* é necessariamente ponto de acumulação do domínio.

5. $f'(x) = -x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1$

x		1	
f'	+	0	–
f	↗	$f(1)$	↘

A função *f* tem um máximo para *x* = 1.

Resposta correcta: **(D).**

6. $f'(x) = -e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow -e^x = 1$

$\Leftrightarrow e^x = -1$, equação impossível.

A função *f* ’ não se anula, então a função *f* não tem extremos.

Por outro lado, $f'(x) < 0, \forall x \in IR$, daí que a função *f* seja estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

Resposta correcta: **(C).**

Pág. 251

1.1. Por observação e análise do gráfico de *f* ’, temos:

x		2	
f''	–	0	+

Então, a função *f* é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$.

A função *f* tem um mínimo relativo para *x* = 2.

1.2. Expressão analítica de *f*’:

$y = mx + b,\ \ b = -6$ (ordenada na origem)

$m = 3$ (declive)

Logo, $y = 3x - 6$

Donde $f'(x) = 3x - 6$

$f''(x) = 3$

Como $f''(x)$ não se anula, então a função *f* não tem qualquer ponto de inflexão.

1.3. O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima, uma vez que $f''(x) = 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Assimptotas verticais:

$\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$

A recta da equação *x* = 1 é uma assimptota vertical (unilateral).

• Assimptotas não verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e$$

Logo, a recta da equação *y* = *e* é uma assimptota horizontal, do gráfico de *f*.

• Extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$f'(x) < 0, \forall \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então a função *f* é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.

• Pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]' e^{\frac{x+1}{x-1}}+\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)\times\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$$

$$=\frac{4(x-1)}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}+\left(\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)\left(\frac{-2}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{4(x-1)}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{4}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{4xe^{\frac{x+1}{x-1}}}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

x		0	
f''	–	0	+
f	$\cap$	PI	$\cup$

A função tem um ponto de inflexão para $x = 0$, sendo esse o ponto de coordenadas $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

3. Seja o volume da caixa, em função de x, dado por;

$V(x)$ = área da base × altura

$$V(x)=(30-2x)(25-2x)x$$

$$V(x)=750x-110x^2+4x^3$$

$$V(x)=12x^2-220x+750$$

$$V'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{220\pm\sqrt{48\,400-36\,000}}{24}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{220\pm\sqrt{12\,400}}{24}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{220\pm 20\sqrt{31}}{24}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{55+5\sqrt{31}}{6}\vee\frac{55-5\sqrt{31}}{6}$$

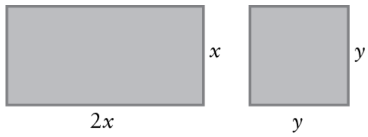
$$\Leftrightarrow x=\frac{55-5\sqrt{31}}{6}\text{, pois } 0<x<12{,}5$$

x	0		$\frac{55-5\sqrt{31}}{6}$		12,5
V'	750	+	0	–	– 125
V		↗	$V\left(\frac{55-5\sqrt{31}}{6}\right)$	↘	$V(12{,}5)$

A função V tem um máximo para $x=\frac{55-5\sqrt{31}}{6}\approx 4{,}53$.

Assim, a caixa tem capacidade máxima quando a dimensão dos cantos a cortar for igual a 4,53 cm.

4.



Sabemos que o agricultor dispõe de 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular e outro quadrangular, como os ilustrados nas figuras acima; assim:

$$1680=6x+4y\Leftrightarrow y=\frac{1680-6x}{4}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{840-3x}{2}$$

Pretendemos determinar as dimensões dos terrenos de modo a maximizar a área dos dois espaços, daí que:

$$A=2x^2+y^2$$

Mas, $y=\frac{840-3x}{2}$, donde: $A=2x^2+\left(\frac{840-3x}{2}\right)^2$

$$A=2x^2+\frac{705\,600-5040x+9x^2}{4}$$

$$A=\frac{8x^2+705\,600-5040x+9x^2}{4}$$

$$A=\frac{17x^2-5040x+705\,600}{4}$$

$$A'=\frac{34x-5040}{4}$$

$$A'=8{,}5x-1260$$

$$A'=0\Leftrightarrow 8{,}5x-1260=0\Leftrightarrow x=\frac{2520}{17}$$

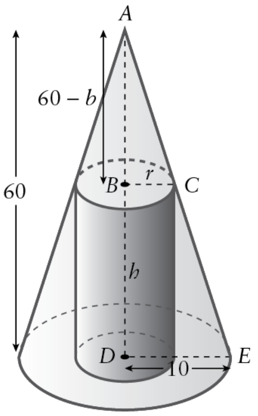
x	0		$\frac{2520}{17}$	
A'		–	0	+
A		↘	$A\left(\frac{2520}{17}\right)$	↗

A função A tem um mínimo relativo para $x = \frac{2520}{17}$, ou seja, a área dos dois espaços é mínima quando a medida da largura do rectângulo é igual a $\frac{2520}{17}$.

Rectangular: $\frac{2520}{17}$ m de largura e $\frac{5040}{17}$ m de comprimento.

Quadrangular: $\frac{840 - 3\left(\frac{2520}{17}\right)}{2} = \frac{3360}{17}$ m de lado.

5. O volume do cone é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.



$V = \frac{1}{3}\pi \times 10^2 \times 60$

$V = 200\pi$

O volume do cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.

Os triângulos [*ABC*] e [*ADE*] são semelhantes (têm dois ângulos geometricamente iguais). Então os comprimentos dos seus lados são proporcionais, isto é:

$\frac{60 - h}{r} = \frac{60}{10} \Leftrightarrow 10(60 - h) = 60r$

$\Leftrightarrow \frac{600 - 10h}{60} = r \Leftrightarrow r = \frac{60 - h}{6}$

ou $h = 60 - 6r$, sendo r o raio do cilindro e h a sua altura.

Volume do cilindro = área da base × altura

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 (60 - 6r)$

$V = 60\pi r^2 - 60\pi r^3$

$V' = 120\pi r - 18\pi r^2$

$V' = 0 \Leftrightarrow 120\pi r - 18\pi r^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r(60 - 9r) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 0 \vee 60 - 9r = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 0 \vee r = \frac{60}{9}$

$\Leftrightarrow r = 0 \vee r = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow r = \frac{20}{3}$, pois $r > 0$

r	0		$\frac{20}{3}$	
V'		+	0	–
V		↗	$V\left(\frac{20}{3}\right)$	↘

A função V tem um máximo quando $r = \frac{20}{3}$.

Assim, o volume máximo do cilindro é:

$V = 60\pi\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 6\pi\left(\frac{20}{3}\right)^3$

$V = 60\pi\frac{400}{9} - 6\pi\frac{8000}{27}$

$V = \frac{72\,000\pi - 48\,000\pi}{27}$

$V = \frac{8000\pi}{9}$

O volume máximo do cilindro é $\frac{8000}{9}$ cm^3.

6. A função que traduz o problema é dada, em função de n, número de clientes perdidos, por:

$f(n) = 30(10 + 2n) - (10 + 2n)n$

$f(n) = -2n^2 + 50n + 300$

$f'(n) = -4n + 50$

$f'(n) = 0 \Leftrightarrow -4n + 50 = 0 \Leftrightarrow n = 12{,}5$

n	0		12,5	
f'	50	+	0	–
f	300	↗	612,5	↘

A função f é máxima para n = 12,5.

Assim, para que o lucro obtido pelo proprietário do restaurante seja máximo, cada refeição deve custar 12,5 meticais.