PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 5

Pág. 155

1.1 $\lim\limits_{x\to 2}(-3x^2) = -3\times 2^2 = -3\times 4 = -1$

1.2 $\lim\limits_{x\to 0}(-3) = -3$

1.3 $\lim\limits_{x\to -5}(-1-x^2) = -1-(-5)^2 = -1-25 = -26$

1.4 $\lim\limits_{x\to 0}(-2x+3x^2) = -2\times 0 + 3\times 0^2 = 0$

1.5 $\lim\limits_{x\to 1}(-2x+x-2) = -2\times 1+1-2 = -3$

2.1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ Calculam-se os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x) = 1-1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1) = 1^2-1 = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 e o valor deste limite é igual ao valor comum dos limites laterais.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

2.2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ Calculam-se os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3x-5) = 3\times 2-5 = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1) = 2^2-1 = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.3 $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3}\sqrt{1-x} = \sqrt{1+3} = 2$

3.1 a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

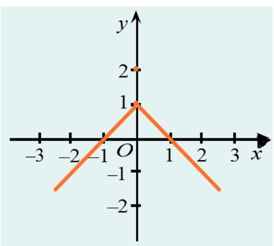
c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

3.2 **a)** $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ – não existe;

3.3 Por exemplo:



Pág. 159

4. Queremos mostrar, usando a definição de limite segundo Heine, que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$.

Para o mostrarmos, usando a definição, vamos começar por escrever sucessões convergentes para zero.

Temos um número infinito de sucessões que convergem para zero:

$a_n = \dfrac{1}{n}$; $b_n = \dfrac{1}{2n}$; $c_n = -\dfrac{1}{n}$; $d_n = -\dfrac{1}{2n}$;...

Se considerarmos a sucessão $a_n = \dfrac{1}{n}$, a sucessão das imagens tendia para zero.

Se considerarmos a sucessão $c_n = -\dfrac{1}{n}$, a sucessão das imagens convergia para zero.

Encontramos duas sucessões nas condições da definição, ambas convergentes para zero, todos os termos das sucessões das imagens convergiam para valores diferentes.

Logo, a função não tem limite quando $x \to 0$.

Pág. 160

5.1 $\lim\limits_{x\to 7}(9) = 9$ **5.2** $\lim\limits_{x\to 7}(-3) = -3$

5.3 $\lim\limits_{x\to 0}(-\pi) = -\pi$ **5.4** $\lim\limits_{h\to 0}(-2h) = -2\times 0 = 0$

5.5 $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x) = \lim\limits_{x\to 5} x^2 - \lim\limits_{x\to 5} 2x =$

$= 5^5 - 2\times 5 = 25 - 10 = 15$

5.6 $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+4)^2 = \left(\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 3\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 4\right)^2$

$= \left((-1)^2 - 3\times(-1)+4\right)^2 = (-1+3+4)^2 = 8^2 = 64$

5.7 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^2-2)^5$

$= \left[\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^2-2)\right]^5 = \left[\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^2) - 2\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x\right]^5$

$= \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2\times\dfrac{1}{2}\right]^5 = \left[\dfrac{1}{4}-1\right]^5 = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^5 = -\dfrac{243}{1024}$

5.8 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-3)(x+9)}{2x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)(x+9)}{\lim\limits_{x\to 1} 2x}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)\times\lim\limits_{x\to 1}(x+9)}{\lim\limits_{x\to 1} 2x}$

$= \dfrac{(1-3)\times(1+9)}{2\times 1} = \dfrac{-2\times 10}{2} = -10$

5.9 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}}$

$=\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}x}}=\sqrt{\dfrac{6}{3}}=\sqrt{2}$

Pág. 162

6.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-50+x)=+\infty$

6.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-50+x)=-\infty$

6.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

6.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2000+x)=-\infty$

6.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3+\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2$

$=+\infty+\infty=+\infty$

6.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$

$=+\infty+\infty=+\infty$

6.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-x^3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$

$=-(+\infty)-(+\infty)=-\infty$

Pág. 164

7.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2)=3\times\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)$

$=3\times(+\infty)^2=+\infty$

7.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2)=3\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=3\times(-\infty)^2=+\infty$

7.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x(3-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)$

$=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

7.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}[x(3+x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)\times\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x)$

$=-\infty\times(-\infty)=+\infty$

8.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{5}{+\infty}=0$

8.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{2}{-\infty}=0$

8.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^2+1}=\dfrac{8}{+\infty}=0$

8.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x+3}=\dfrac{-1}{-\infty}=0$

Pág. 166

9.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$

Como $\lim\limits_{x\to 1}x-1=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$.

9.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x^2-4}$

Como $\lim\limits_{x\to 2}x^2-4=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-4}$.

9.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$

Como $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$ vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

Como os limites laterais são iguais, existe $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$ e é igual a $+\infty$.

Pág. 167

10.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2+2)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=(+\infty)^3=+\infty$

10.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+2)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=(+\infty)^3=+\infty$

10.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x+\dfrac{1}{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=2\times\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=2\times(-\infty)^3=-\infty$

10.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+x^4+2)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^5=-3\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-3\times(-\infty)^5=+\infty$

Pág. 168

11.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{2}$,

aplicando os teoremas sobre limites somos conduzidos a uma determinação do tipo $\infty-\infty$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3-x}{2\times\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$

$=\dfrac{3}{2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{+\infty}$

$=\dfrac{3}{2}\times 0=0$

11.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

11.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+2}+3x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+2-9x^2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{9x^2+2}+3x}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

11.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}-\sqrt{2x+3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}\right)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-(2x+3)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$

$=\dfrac{-3}{+\infty}$

$=0$

Pág. 168

12.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$

12.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{1-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

12.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x^2}{1-x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-x^2}$

$=2+(-1)=1$

Pág. 170

13.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

13.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-x}=0$

13.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x}{x^2-3}+\dfrac{x}{x^2-1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0+0=0$

14.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

14.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=-(-\infty)=+\infty$

14.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^2+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-(+\infty)=-\infty$

Pág. 171

15.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\times\dfrac{1}{x^2}\right)$, temos uma indeterminação do tipo $(\infty\times 0)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

15.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\times\left(x^3+1\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty$

15.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\times\dfrac{x^2+1}{x^3-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7+x^5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$

Pág. 172

16.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Como estamos perante uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, é porque os polinómios do numerador são divisíveis por $x-2$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \quad =\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

16.2 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to -3}x-3$

$=-6$

16.3 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)} =\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{-1+3}{-1-2} \quad =-\frac{2}{3}$

Cálculo auxiliar

	1	4	3
−1		−1	−3
	1	3	0

	1	−1	−2
−1		−1	−2
	1	−2	0

16.4 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^2-8x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(2x-6)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{2x-6}=\frac{1^2-5+6}{2-6}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

Cálculo auxiliar

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

	2	−8	6
1		2	−6
	2	−6	0

17.1 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x^2\times\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2\times\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x\times\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{0^+}$

$=+\infty$

17.2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1}-(1+\sqrt{x})$

$=-2$

17.3 $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+5}-1}{x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to -4}\frac{(\sqrt{x+5}-1)(\sqrt{x+5}+1)}{(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -4}\frac{x+5-1}{(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+1}$

$=\frac{1}{2}$

Pág. 173

18.1 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^x+1}{x^6}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2^x}{x^6}\right)+\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^6}$

$=+\infty+0$

$=+\infty$

18.2 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2^x}{x^3}=\frac{0}{-\infty}=0 \qquad \left(\lim\limits_{x\to -\infty}a^x=0,\ a>1\right)$

18.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-3^{x+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x(1-3)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x(-2)}{x^2}$

$=-2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^2}$

$=-2\times(+\infty)$

$=-\infty$

18.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\dfrac{\pi^x}{3^{x+1}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi^x}{3^{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi^x}{3^x\cdot 3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x\cdot\dfrac{1}{3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3}\right]$

Como, $0<\dfrac{1}{2}<1$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$

e como $\dfrac{\pi}{3}>1$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x=+\infty$

$=0+\left(+\infty\times\dfrac{1}{3}\right)=+\infty$

18.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{5x}}{x^8}\right)=\dfrac{0}{+\infty}=0$

Pág. 174

19.1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)^2}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\times\ln(x+1)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

19.2 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x^3}{3x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3\times\ln(x)}{3(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln((x-1)+1)}{x-1}=1$

19.3 $\lim\limits_{f(x)\to1}\dfrac{\ln(f(x))}{f(x)-1}(1)$

Seja $y=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)=y+1$

Se $f(x)\to1, y\to0$

Substituindo em (1):

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}=1$

19.4 $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\ln(5+x)}{4+x}$

Seja $y=4+x\Rightarrow x=y-4$

Se $x\to-4, y\to0$

Então vem:

$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\ln(5+x)}{4+x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}=1$

Pág. 175

20.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(2x)}{2x}\times2\right]$

$=2\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{2x}$

$= 2 \times 0$

$= 0$

20.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-3x)}{x}$

Efectuando a seguinte mudança de variável, temos que:

$-x=y\Leftrightarrow x=-y$

e se $x\to-\infty$ então $y\to+\infty$.

Assim,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-3x)}{x}$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln(3y)}{y}$

$=3\times\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln(3y)}{3y}$

$= 3 \times 0 = 0$

20.3 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)}{\lim\limits_{x\to0^+}x}$

$=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty$

20.4 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(-2x)}{x}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(-2x)}{\lim\limits_{x\to 0^-}x}$

$=\dfrac{-\infty}{0^-}=+\infty$

Pág. 176

1. $\lim u_n=\lim\left(5-e^{-n}\right)$

$=\lim 5-\lim e^{-n}=\lim 5-\lim\dfrac{1}{e^n}=5-0=5$

Resposta correcta: **(D)**.

2. $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}=\lim\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^3$

$=\left(\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^3=e^3$

Resposta correcta: **(A)**.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^x-1}{x}}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2$

Resposta correcta: **(D)**.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2e^{3x}=3\times\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-3x}}$

$=3\times\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(-x)^{\frac{2}{3}}}{e^{-x}}\right)^3$

$=3\times\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)^{\frac{2}{3}}}{e^{-x}}\right]^3=3\times\left[\lim\limits_{-x\to+\infty}\dfrac{(-x)^{\frac{2}{3}}}{e^{-x}}\right]^3$

$=3\times 0^3=0$

Resposta correcta: **(C)**.

5. $f(x)=a+e^{bx}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$
- O gráfico de *f*, intersecta o eixo *OY* em *P* (0, 3)

Daí que: $3=a+e^{b\times 0}$, porque (0, 3) é um ponto do gráfico de *f*.

$\Leftrightarrow 3=a+e^0$

$\Leftrightarrow 3=a+1$

$\Leftrightarrow a=2$

Resposta correcta: **(A)**.

6. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{k}{0^+}$

com *k* um número real negativo

logo, $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\infty$

Resposta correcta: **(C)**.

7. $\lim\limits_{x\to 3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-x}{x-3}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

Resposta correcta: **(C)**.

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln(x)}=\dfrac{0^+}{-\infty}=0$

Resposta correcta: **(D)**.

9. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{k}{0^+}$,

com *k* um número real positivo

logo, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

Resposta correcta: **(A)**.

Pág. 177

1.1 $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2+\dfrac{1}{x}>0\right\}$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x^3+1	–	0	+		+
x	–	–	–		+
$\dfrac{x^3+1}{x}$	+	0	–		+

Cálculo auxiliar

$x^2+\dfrac{1}{x}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^3+1}{x}=0$

$\Leftrightarrow x^3+1=0\wedge x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=-1\wedge x\neq 0$

Logo, $Df=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-\ln(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^3+1}{x}\right)-\ln(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\frac{x^3+1}{x}}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=0$

2.1 $D_f=\mathbb{R}$

2.2 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1+5x^3e^{-x})$

$=-1+\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3e^{-x})$

$=-1+5\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$

$=-1+5\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}}\right)=-1+5\times\frac{1}{+\infty}$

$=-1+5\times0=-1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1+5x^3e^{-x})$

$=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3e^{-x})$

$=-1+5(-\infty)(+\infty)$

$=-\infty$

3.1 **a)** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$

$=+\infty\times1=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=0$, pois $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

3.2 **a)** $D_g=\{x\in\mathbb{R}:x^2-1>0\}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

b) $f(x)>g(x)$

Com o auxílio da calculadora gráfica e introduzindo na mesma as funções:

$y_1=\frac{e^x-1}{x}$

$y_2=5+\ln(x^2-1)$

A partir de alguns valores obtidos na tabela, definiu-se a janela de visualização.

Com a ajuda da ferramenta INTERSECT da calculadora, conclui-se que:

$f(x)>g(x)\Leftrightarrow x\in]3{,}17;+\infty[$

4.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{-\infty}=0$

4.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}$

$=\frac{1}{+\infty}=0$

4.3 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$

$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-x}{x^2+1}=\frac{1}{1}=1$

Como $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, então o $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ existe e é igual a 1. Assim, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

5.1 $Q(0)=250\,e^{-0{,}05\times0}=250$

Significa que no início (instante $t=0$) o recipiente contém 250 gramas de sal.

5.2 $Q(10)=250\,e^{-0{,}05\times10}=250\,e^{-0{,}5}$

$=\frac{250}{e^{0{,}5}}=151{,}63$ (2 c. d.)

Significa que no instante $t=10$ minutos, ainda havia, aproximadamente, 151,63 gramas de sal por dissolver.

5.3 $\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} 250\,e^{-0{,}05t} = 0$

Significa que há medida que o tempo decorre a quantidade de sal por dissolver, aproxima-se de zero gramas.

6. $v(t)=\begin{cases}15+10\times 3^{-0{,}2t}, & 0\le t\le 10\\ 5+A\times 3^{-0{,}2t}+2, & t\ge 10\end{cases}$

6.1 $V(0) = 15 + 10 \times 3^{-0{,}2\times 0} = 15 + 10 \times 3^0 = 25$

Significa que no início o móvel tinha uma velocidade de 25 m/s.

6.2 $\lim_{t\to 10} v(t)$ existe se: $\lim_{t\to 10^+} v(t)=\lim_{t\to 10^-} v(t)$

Assim:

$\lim_{t\to 10^+} v(t)=\lim_{t\to 10^-} v(t)$

$\Leftrightarrow \lim_{t\to 10^+}\left(5+A\times 3^{-0{,}2t+2}\right)=\lim_{t\to 10^-}\left(15+10\times 3^{-0{,}2t}\right)$

$\Leftrightarrow 5+A\times 3^{-0{,}2\times 10+2} = 15+10\times 3^{-0{,}2\times 10}$

$\Leftrightarrow A\times 3^{-2+2} = 10+10\times 3^{-2}$

$\Leftrightarrow A=10+\dfrac{10}{3^2}$

$\Leftrightarrow A=10+\dfrac{10}{9}$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{100}{9}$

6.3 $\lim_{t\to+\infty}\left(5+\dfrac{100}{9}\times 3^{-0{,}2t+2}\right)$

$=5+\dfrac{100}{9}\lim_{t\to+\infty} 3^{-0{,}2t+2} = 5+\dfrac{100}{9}\lim_{t\to+\infty} 3^{-0{,}2t}\times 3^2 =$

$=5+\dfrac{100}{9}\lim_{t\to+\infty}\dfrac{9}{3^{0{,}2t}} = 5+\dfrac{100}{9}\times 0=5$

Conclusão: À medida que o tempo aumenta (indefinidamente), o móvel tende a atingir uma velocidade de 5 m/s. Daí que a velocidade do móvel pode atingir, obviamente, os 4 m/s.

Pág. 181

1.1 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x>0\\ x & \text{se } x\le 0\end{cases}$

(i) $0\in D_f$

(ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, então a função *f* não é contínua no ponto *x* = 0.

(iii) $f(0)=0$

Atendendo a que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\ne \lim_{x\to 0^+} f(x)$ a função *f* é contínua à esquerda de 0 e descontínua à direita.

1.2 $g(x)=\begin{cases}|x| & \text{se } x\ge -1\\ 2x & \text{se } x<-1\end{cases}=\begin{cases}x & \text{se } x>0\\ -x & \text{se } -1\le x\le 0\\ 2x & \text{se } x<-1\end{cases}$

(i) $-1\in D_g$

(ii) $\lim_{x\to -1^+}(-x)=1$

$\lim_{x\to -1^-} 2x=-2$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to -1} g(x)$, a função *g* não é contínua no ponto *x* = – 1.

(iii) $g(-1)=1$

Atendendo a que:

$\lim_{x\to -1^+} g(x)=g(-1)\ne \lim_{x\to -1^-} g(x)$ a função *g* é contínua à direita de – 1 e descontínua à esquerda.

1.3 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x\ne 1\\ 0 & \text{se } x=1\end{cases}$

(i) $1\in D_h$

(ii) $\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0}$

Temos, assim, de calcular os limites laterais:

$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

Atendendo a que não existe $\lim_{x\to 1} h(x)$, e como estes são infinitos, então a função *h* não é contínua nem à direita nem à esquerda de 1.

1.4 $i(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{se } x>-2\\ 3 & \text{se } x=-2\\ -1 & \text{se } x<-2\end{cases}$

(i) $-2\in D_i$

(ii) $\lim_{x\to -2^+} i(x)=\lim_{x\to -2^+}(x^2-1)=(-2)^2-1=3$

$\lim_{x\to -2^-} i(x)=\lim_{x\to -2^-} -1=-1$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to -2} i(x)$, a função *i* não é contínua no ponto *x* = – 2.

Atendendo a que:

$\lim_{x\to -2^+} i(x)=i(-2)\ne \lim_{x\to -2^-} i(x)$ a função *i* é contínua à direita de – 2 e descontínua à esquerda de – 2.

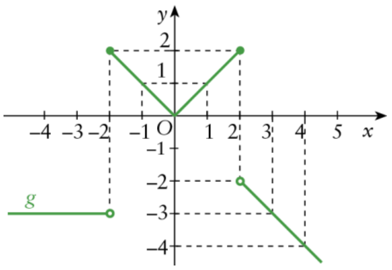
Pág. 182

2.1 $D_g = [0, 4]$

2.2 Em 0, 2 e 4 a função g é contínua.
Em 1 é descontínua, mas contínua à direita.
Em 3 é descontínua.

Pág. 184

3.1



3.2 A função é contínua nos seguintes intervalos:
$]-\infty,-2[\,;\,]-2,2[\,;\,]2,+\infty[$.

Pág.185

4.1 Por exemplo:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 1$, donde $f(x) = x^2 - 1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 1$, donde $g(x) = x + 1$

4.2 A função h é contínua no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$, por ser a composta de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (funções polinomiais).

5. A função $y = \cos(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função $y = \dfrac{\pi}{x}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y = \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ é a composta de duas funções contínuas.

Assim, a função $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pág.189

6.1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

- Estudo das assimptotas verticais do gráfico de f:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico de f (bilateral).

- Estudo das assimptotas não verticais do gráfico de f:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \qquad \begin{array}{rrr|l} x^2 & +\ 0x & -1 & x \\ \cline{4-4} -x^2 & & & x \\ \hline & & -1 & \end{array}$$

$$= x + \frac{-1}{x}$$

Logo, o gráfico de f tem uma assimptota não vertical (oblíqua), que é a recta de equação $y = x$.

6.2 $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

- Estudo das assimptotas verticais do gráfico de f:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicando a Regra de Ruffini, temos:

	1	0	0	1
– 1		– 1	1	– 1
	1	– 1	1	0

Assim, vem que:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 1$ é uma assimptota vertical do gráfico de f.

Nota: $x = -1$ não é uma assimptota vertical, uma vez que, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ não é infinito.

- Estudo das assimptotas não verticais do gráfico de f:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +\ 0x^2 & +\ 0x & +\ 1 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +\ x & & x \\ \hline & & +\ x & +\ 1 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$= x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

A recta de equação $y = x$ é uma assimptota vertical do gráfico de f.

6.3 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}$

- Estudo das assimptotas verticais do gráfico de *f*:

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{1-x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{1-x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

A recta de equação $x = 1$ é uma assimptota vertical ao gráfico de *f*.

- Estudo das assimptotas não verticais do gráfico de *f*:

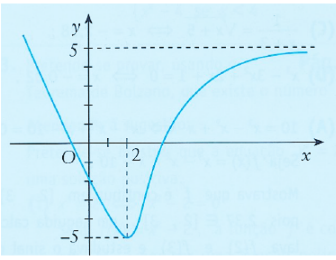
$$g(x)=\frac{x^2+3}{1-x}=-x-1+\frac{4}{-x+1}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^2 & +\ 0x & +\ 3 & & -x-1 \\
-x^2 & +\ x & & & \hline -x-1 \\
\hline
 & x & +\ 3 & & \\
 & -x & +\ 1 & & \\
\hline
 & & 4 & &
\end{array}$$

Logo, a recta de equação $y = -x - 1$ é uma assimptota não vertical (oblíqua) do gráfico de *f*.

Pág. 192

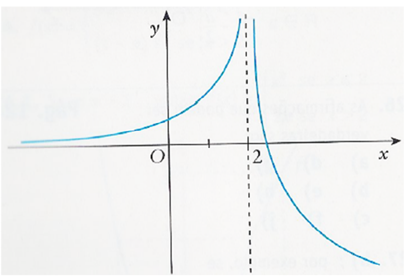
1. Um gráfico possível da função *h* será o seguinte:



- A afirmação **(A)** é falsa, a função *h* tem dois zeros e não um;
- A afirmação **(B)** é falsa, pois o contradomínio de *h* é $[-5,+\infty[$;
- A afirmação **(C)** é falsa, pois se $y = 5$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h*, quando $x\to+\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$;

(D) é verdadeira.

2. Um gráfico possível da função *h* será o seguinte:



- A afirmação **(A)** é falsa, pois se *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=+\infty$; então, *f* tem pelo menos um zero;
- A afirmação **(B)** é falsa, a recta de equação $x = 2$ é uma assimptota vertical do gráfico de *h*;
- A afirmação **(C)** é falsa, a recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h*;
- A afirmação **(D)** é verdadeira, uma vez que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=+\infty$; então, a recta de equação $y = -1$ intersecta, em pelo menos um ponto, o gráfico de *h*.

(D) é verdadeira.

3. Pretendemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+f(x)}{1-e^x}$.

Como $y = -2$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f*, quando $x\to-\infty$, então $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, daí que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+f(x)}{1-e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-e^x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-e^x}$$

$$=\frac{2}{1-0^+}+\frac{-2}{1-0^+}=0\text{, pois }\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+.$$

Resposta correcta: **(D)**.

4. Sabe-se que $D_f=IR^+$ e $y = -5$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *h*, assim,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$.

Pretendesse determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{-3e^{-x}}$.

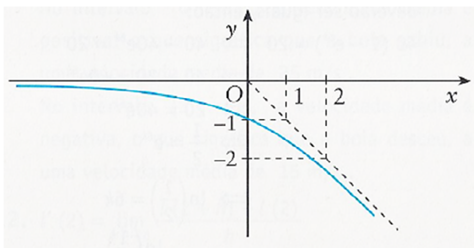
Ora, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{-3e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-3e^{-x}}$

$$=-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\lim_{x\to+\infty} e^x=-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(+\infty)$$

$$=\frac{5}{3}\times(+\infty)=+\infty$$

Resposta correcta: **(B)**.

5. Um possível gráfico da função *f* será o seguinte:



Logo, o contradomínio da função *f* é $]-\infty,0[$, pois *f* é estritamente decrescente e $y = -x$ e $y = 0$ são assimptotas do seu gráfico.

Resposta correcta: **(D)**.

Pág. 193

1. Sabemos que:

$D_h = \mathbb{R}^+$

e o gráfico de h tem uma assimptota oblíqua, ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = m$ é diferente de zero e finito.

Assim sendo, e sabendo, também, que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+h(x)} = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x+h(x)}{x} = -3 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = -3 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = -4$$

Então $m = -4$ e $y = -4x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Donde $y = -4x + 3$, pois o ponto de coordenadas (0, 3) pertence à recta.

2. Queremos determinar $\lim h(a_n)$, ou seja:

$\lim h(1 - n + 3n^2)$.

Sabe-se que $\lim h(1 - n + 3n^2) = \lim 3n^2 = +\infty$; então, $\lim h(a_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -2$, pois $y = -2$ é uma assimptota horizontal do gráfico de h, quando $x \to +\infty$. Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -2$.

Então, $\lim h(a_n) = -2$.

3.
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ k + e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estudemos a continuidade de f para $x = 0$:

(i) $0 \in D_f$ pois $f(0)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln(x+1)} = 1$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(k+e^x) = k+1$

Daí que $k+1 = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$, k deverá ser igual a zero.

4. Sabemos que:

(i) f é contínua em [0, 3];

(ii) $f(0) = 10$ e $f(3) = 0$.

Pretendemos mostrar que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo]0, 3[.

Como f é contínua em [0, 3] e $f(3) < 2 < f(0)$, pelo Teorema de Bolzano, pode concluir-se que $\exists x \in \left]0,3\right[: f(x) = 2$.

5.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)+x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.1 A função f é contínua em $\left]-\infty,0\right[$, por ser definida por operações entre funções contínuas no seu domínio, a saber:

$f_1(x) = x$, contínua em IR, por ser polinomial;

$f_2(x) = 1$, contínua em IR, por ser constante;

$f_3(x) = \sqrt{1-x}$, contínua em $\left]-\infty,1\right]$, que é o seu domínio por ser uma função irracional, e $\left]-\infty,0\right[\subset \left]-\infty,1\right]$.

A função f é, também, contínua em $\left]0,+\infty\right[$, por ser definida por operações entre funções contínuas no seu domínio, a saber:

$f_4(x) = \ln(1+x)$, contínua em $\left]-1,+\infty\right[$, que é o seu domínio, por ser composta de uma função logarítmica com uma função polinomial.

$f_5(x) = x$, contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma função polinomial (função identidade).

Continuidade para $x = 0$:

f é contínua para $x = 0$ se:

(i) $0 \in D_f$

(ii) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$.

Ora, $0 \in D_f$, pois $f(0) = 2$.

Quanto à condição (ii), temos:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+x)+x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x} = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Mas, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(1+\sqrt{1-x}\right) = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$, logo,

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ e $f(0) = 2$.

Então, a condição **(ii)** é também satisfeita.

Conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

5.2 $f(x)=|x|$

Seja $g(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$

então $f(x)=|x|$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=-x \wedge x<0\right)\vee$

$\vee\left(\dfrac{\ln(1+x)+x}{x}=x \wedge x>0\right)$

$\Leftrightarrow x=-3 \vee x\approx 1{,}6$

Estas soluções foram obtidas com o auxílio da calculadora gráfica. Como pretendemos uma solução inteira, vem $x=-3$.

6. $v(t)=\begin{cases} 40\left(1-e^{kt}\right) & \text{se } t<6 \\ 5+15e^{-1,2t+7,2} & \text{se } t\geq 6 \end{cases}$

6.1 Sabemos que a função v é contínua.

Vamos então garantir a continuidade para $t=6$.

v é contínua para $t=6$ se:

(i) $6\in D_v$

(ii) $\lim\limits_{t\to 6} v(t)=v(6)$.

A primeira condição é verdadeira, pois v (6) existe e é igual a 20.

Quanto à segunda condição, temos:

$\lim\limits_{t\to 6^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 6^-}\left[40\left(1-e^{kt}\right)\right]=40\left(1-e^{6k}\right)$;

$\lim\limits_{t\to 6^+} v(t)=\lim\limits_{t\to 6^+}\left(5+15e^{-1,2t+7,2}\right)=20$

Para que o $\lim\limits_{t\to 6} v(t)$ exista, os limites laterais deverão ser iguais, então:

$40\left(1-e^{6k}\right)=20 \Leftrightarrow 40-40e^{6k}=20$

$\Leftrightarrow 40-20=40e^{6k} \Leftrightarrow 20=40e^{6k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=e^{6k}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=6k \Leftrightarrow k=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{6} \Leftrightarrow k\approx -0{,}12$

6.2 A velocidade aumenta desde o instante em que o pára--quedista salta do avião ($t=0$) até ao instante em que o pára-quedas abre ($t=6$), variando de 0 m/s a 20 m/s. Após a abertura do pára-quedas, a velocidade decresce estabilizando em cerca de 5 m/s a partir do instante $t=10$.