PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 4

Pág. 113

1.1 **a)** (a_n) é monótona crescente.
b) (b_n) não é monótona.
c) (c_n) é monótona decrescente.

1.2 $x_1 = -3$; $x_2 = 9$ e $x_3 = -27$;
$x_2 > x_1 \wedge x_3 < x_2$.

1.3 $v_5 = 1$; $v_6 = 0$ e $v_7 = 1$
$v_6 < v_5$ e $v_7 > v_6$.

3.1 **a)** $-2, 0, 2, 4, 6$;
b) $-2, -5, -8, -11; -14$;
c) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0$.
d) $-2, -2, -2, -2, -2$.

3.3 É uma progressão aritmética de razão 3.

4. $r = 3$

Pág. 122

5.1 $-3, -6, -12, -24, -48$;

5.2 $-5, 10, -20, 40, -80$;

5.3 $1, -1, 1, -1, 1$.

5.4 Se $r = \sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$

Se $r = \sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$.

6.1 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.2 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

6.3 É uma progressão geométrica de razão 1 (sucessão constante).

6.4 É uma progressão geométrica de razão 3.

6.5 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.6 Não é uma progressão geométrica.

Pág. 125

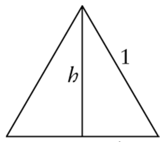
7.1 Dois triângulos consecutivos são semelhantes.

A razão das áreas é igual a $\frac{1}{4}$. Então a razão das medidas dos lados é igual a $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Portanto, a sucessão (a_n) das áreas é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e as sucessões (l_n) dos comprimentos dos lados e (P_n) dos perímetros são progressões geométricas de razão $\frac{1}{2}$.

$p_1 = 1 \times 3 = 3$ e $r = \frac{1}{2}$

$p_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times 2^{1-n}$

7.2 $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$



$h^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$h^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{10} = a_1 \times \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right) \approx 0{,}58$

7.3 $S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \Leftrightarrow S_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

8. $u_3 = 208$ e $u_5 = 3328$

$u_5 = u_3 \times r^{5-3} \Leftrightarrow 3328 = 208 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16$

Como $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ terá de ser $r > 0$ pelo que $r = 4$.

$u_8 = u_5 \times r^{8-5} \Leftrightarrow 3328 \times 4^3 = 212992$

$$S = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = u_8 \times \frac{1-r^5}{1-r} =$$

$$= 212992 \times \frac{1-4^5}{1-4} = 212992 \times 341 = 72630272$$

Pág. 126

1. $\begin{cases} u_4 + u_5 + u_6 = 63 \\ u_{10} + u_{12} = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3r + u_1 + 4r + u_1 + 5r = 63 \\ u_1 + 9r + u_1 + 11r = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 12r = 63 \\ 2u_1 + 20r = 102 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(S_1 - 10r) + 12r = 63 \\ u_1 = 51 - 10r \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 153 - 30r + 12r = 63 \Leftrightarrow 18r = 90 \Leftrightarrow r = 5$

Resposta: (C).

2. $14 + 10{,}5 + 7 + 3{,}5 + \ldots + (-17{,}5) = S$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão 3,5.

$a_n = 14 + (n-1) \times 3{,}5$

$-17{,}5 = 14 + 3{,}5n + 3{,}5 \Leftrightarrow 3{,}5n = 35 \Leftrightarrow n = 10$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_2}{2} \times 10 = \frac{14 - 17{,}5}{2} \times 10 = -17{,}5$$

Resposta: (D).

3. $u_1 = 2 \wedge u_{n+1} = u_n - 7, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = -7, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo (u_n) é monótona decrescente.

Resposta: (B).

4. $\frac{x}{6} = \frac{8{,}64}{x} \Leftrightarrow x^2 = 6 \times 8{,}64 \Leftrightarrow x^2 = 51{,}84 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{51{,}84} \Leftrightarrow x = \pm 7{,}2$

Resposta: (A).

5. $a_2 = 0{,}9$, $r = 0{,}3$

$a_{20} = a_2 \times r^{20-2} = 0{,}9 \times (0{,}3)^{18} =$

$= 3 \times (0{,}3) \times (0{,}3)^{18} = 3(0{,}3)^{18}$

Resposta: (B).

6. $S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} =$

$$= 2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2(2^{10} - 1) = 2 \times 1023 = 2046$$

7. Progressão aritmética (c_n) de razão 500 sendo:

$C_1 = 5500$

$c_n = 50000 \Leftrightarrow 5500 + (n-1) \times 500 = 50000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 55 + 5n - 5 = 500 \Leftrightarrow 5n = 450 \Leftrightarrow n = 90$

Resposta: (C).

8. (v_n) é uma progressão geométrica de razão $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$v_1 = 510 \times \frac{3}{4} = 382{,}5$

$$v_{10} = v_1 \times r^9 = 382{,}5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 28{,}72$$

Resposta: (A).

Pág. 127

1.1 $u_3 = 90$; $u_6 = 2430$; (u_n) é uma p. g.

$u_n = u_k \times r^{n-k}$

$u_6 = u_3 \times r^{6-3} \Leftrightarrow 2430 = 90 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$

$u_1 = u_3 \times r^{1-3} = 90 \times 3^{-2} = 10$

$u_1 = 10$ e $r = 3$.

1.2 $S_{10} = u_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 10 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 5(3^{10} - 1) = 295240$.

2. $u_2 = 24$ e $u_6 = 384$. (u_n) é uma p. g.

2.1 $u_n = u_k \times r^{n-k}$

$u_6 = u_2 \times r^{6-2} \Leftrightarrow 384 = 24 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 16 \Leftrightarrow r = -2 \vee r = 2$

$u_1 = u_2 \times r^{-1}$

Se $r = 2$, $u_1 = \frac{24}{2} = 12$.

Se $r = -2$, $u_1 = \frac{24}{-2} = -12$.

$u_1 = 12$ e $r = 2$ ou $u_1 = -12$ e $r = -2$.

2.2 $S_{10} = 12 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 12\left(2^{10}-1\right) = 12276$

Ou

$S_{10} = -12 \times \frac{1-(-2)^{10}}{1+2} = -4\left(1-2^{10}\right) = 4092$

Se $u_1 = 12$, $S_{10} = 12\,276$; se $u_1 = -12$, $S_{10} = 4092$.

3. (a_n) é uma p. g.; $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{\pi}{2}$.

3.1 $a_{10} = a_1 \times r^9 = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = \frac{\pi^{10}}{10^{24}}$.

3.2 $S_{10} = \frac{\pi}{2} \frac{1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}}{1-\frac{\pi}{2}} \approx 248{,}92$

4.1 $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

(A) e (C) são falsas. (B) é verdadeira.

4.2 $u_n = 2^{n+1}$

$u_{2n} = 2^{2n+1}$

$u_{3n} = 2^{3n+1}$

$u_{5n} = 2^{5n+1}$

(A) e (B) são falsas. (C) é verdadeira.

4.3 $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$v_2 = 2\, v_1 + 3$

$v_{2n-1} = 2v_{2n-1-1} + 3 = 2v_{2n-2} + 3$

(A) e (B) são falsas.

4.4 $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{8}{5} v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3: (A) é verdadeira.

A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{5}$: (B) é falsa.

4.5 $a_n = a_k r^{n-k}$

$a_n = a_2 \times r^{n-2}$

A afirmação é verdadeira.

4.6 A sucessão (u_n) definida por $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma progressão geométrica estritamente crescente e $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n: -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

(A) e (B) são falsas.

4.7 $x - r$, x, $x + r$

$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x-r) \times x \times (x+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (1-r) \times 1 (1+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 - r^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ r = -2 \end{cases}$

$1 - 2 = -1$

$1 + 2 = 3$

Os números são -1, 1 e 3.

6. 1, 3, 9, …

$u_1 = 3$, $r = 3$, (u_n) é uma progressão geométrica

10	20	30	40	50	60
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_7					

$S_7 = 3 \times \frac{1-3^7}{1-3} = 3 \times \frac{-2186}{-2} = 3279$

$v_2 = 2\, v_1 + 3$

$1 + S_7 = 1 + 3279 = 3280$

7. 1.ª hipótese

20×50 Mt $= 1000$ Mt

2.ª hipótese:

$a_1 = 8$ e $r = 5$ sendo (a_n) uma p. a.

$a_{20} = a_1 + 19\, r = 8 + 19 \times 5 = 103$

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{8+103}{2} \times 20 = 1110\,\text{Mt}.$

3.ª hipótese:

$a_1 = \frac{0,2}{100} = 0,002$ e $r = 2$ sendo (a_n) uma p. g.

$S_{20} = a_1 \times \frac{1-r^{20}}{1-r} = 0,002 \times \frac{1-2^{20}}{1-2} = 0,002(2^{20}-1) =$

$= 2097,15$ Mt.

A melhor hipótese é a terceira e a pior é a primeira.

$x_1 = 10$ e $r = 3$.

1.2 $S_{10} = 295\,240$

2.1 $r = -2$ e $x_1 = -12$ ou $r = 2$ e $x_1 = 12$.

2.2 $S_{10} = 4092$ (se $x_1 = 12$)

ou $S_{10} = 12\,276$ (se $x_1 = 12$)

3.1 $a_{10} = \frac{\pi 10}{1024}$

3.2 $S_{10} \approx 248,92$

4.1 A – falsa, B – verdadeira, C – falsa.

4.2 A – falsa, B – falsa, C – verdadeira.

4.3 A – falsa, B – falsa.

4.4 A – verdadeira, B – falsa.

4.5 Verdadeira.

4.6 A – falsa, B – falsa.

5. Os números são – 1, 1 e 3.

6. Ao fim de uma hora conhecem a mentira 3280 pessoas.

7. A melhor hipótese é a terceira e a pior é a primeira.

9. Por exemplo:

9.1 $u_n = (n-9)^2$ **9.2** $u_n = -(n-4)^2$

9.3 $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ **9.4** $u_n = 4 + \frac{1}{n}$

Pág. 132

10. $a_n = 8n + (-1)^n 8n$

10.1 $a_1 = 8 - 8 = 0$; $a_2 = 16 + 16 = 32$; $a_3 = 24 - 24 = 0$;

$a_4 = 32 + 32 = 64$; $a_5 = 40 - 40 = 0$; $a_6 = 48 + 48 = 96$.

10.2 Por exemplo:

$b_n = a_{2n} = 8(2n) + (-1)^{2n} \times 8(2n) = 16n + 16n = 32n$

$c_n = a_{2n-1} = 8(2n-1) + (-1)^{2n-1} \times 8(2n-1) = 8(2n-1) - 8(2n-1) = 0$

$b_n = 32\,n$ e $c_n = 0$ são subsucessões de (a_n).

10.3 Não. Todos os termos de ordem ímpar são nulos.

Pág. 133

11.1 $\lim a_n = \lim(n+1) = +\infty$

11.2 $\lim d_n = \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ porque $n+1 \to +\infty$.

11.3 $\lim g_n = \lim\left(\frac{1}{3n+2}\right) = 0$ porque $3n+2 \to +\infty$.

Pág. 135

12. $a_n = \frac{1-n}{2n}$

12.1 $a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} =$

$= \frac{-n}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n^2-(1-n)(n+1)}{2n(n+1)}$

$= \frac{-n^2-1+n^2}{2n(n+1)} = \frac{-1}{2n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é monótona decrescente.

12.2 $a_n = \frac{1-n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$-\frac{1}{2} < a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_n)$ é limitada.

12.3 (a_n) é convergente porque toda a sucessão monótona é limitada e convergente.

Pág. 137

13. $a_n \to -3$

$\lim(2a_n - a_n^2) = \lim(2a_n) =$

$= 2\times(-3) - (-3)^2 = -6 - 9 = -15$.

14. $a_n \to -1$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n \to \frac{1}{3}$ e $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

14.1 $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

14.2 $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

14.3 $\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = (-1)\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

14.4 $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{-1}{\frac{1}{3}}=-3$

13.5 $\lim\left(\frac{a_n+b_n}{a_n}\right)^3=\left(\lim\frac{a_n+b_n}{a_n}\right)^3=\left(\lim\frac{(a_n+b_n)}{\lim a_n}\right)^3=$

$=\left(\frac{\lim a_n+\lim b_n}{-1}\right)^3=\left(-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

Pág. 138

15. $\lim\sqrt[3]{\frac{2n+1}{n}}=\sqrt[3]{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\sqrt[3]{2}$

Pág. 139

16.1 $u_n=\frac{1+\sin(n)}{n}$

$-1\le\sin(n)\le 1,\forall n\in\mathbb{N}$

$0\le 1+\sin(n)\le 2,\forall n\in\mathbb{N}$

$\begin{cases}0\le u_n\le\frac{1}{n}\\ \lim 0=\lim\frac{1}{n}=0\end{cases}\Rightarrow$ Pelo teorema das sucessões enquadradas $\Rightarrow\lim u_n=0$.

16.2 $v_n=\left(\frac{n+\cos(2n)}{2n}\right)^2$

$-1\le\cos(2n)\le 1,\forall n\in\mathbb{N}$

$n-1\le n+\cos(2n)\le n+1,\forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{n-1}{2n}\le\frac{n+\cos(2n)}{2n}\le\frac{n+1}{2n},\forall n\in\mathbb{N}$

$\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le\left(\frac{n+\cos(2n)}{2n}\right)^2\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2,\forall n\in\mathbb{N}$

$\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le v_n\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2,\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Pelo teorema das sucessões enquadradas:

$\begin{cases}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\le v_n\le\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2\\ \lim\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2=\lim\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2\end{cases}\Rightarrow\lim v_n=\frac{1}{4}$

Pág. 141

17.1 $\lim[-7(-1+3n)]=-7\times(+\infty)=-\infty$

17.2 $\lim[-4(2-7n)]=-4\times(-\infty)=+\infty$

17.3 $\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)(1-n)\right]=(1+0)\times(+\infty)=-\infty$

17.4 $\lim\frac{7}{1-2n}=\frac{7}{-\infty}=0$

17.5 $\lim\frac{-4}{1+n}=\frac{-4}{\infty}=0$

17.6 $\lim\left[\left(n\times\frac{1}{n}\right)\times(n-1)\right]=\lim[1\times(n-1)]=+\infty$

17.7 $\lim\left[\left(n^2\times\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{3}n\right)\right]=$

$=\lim\left[n\left(1-\frac{1}{3}n\right)\right]=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

Pág. 142

18.1 $\lim a_n=\lim(1-n)=-\infty$

18.2 $\lim b_n=\lim(n-3)=+\infty$

18.3 $\lim\left(\frac{1-n}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}-1\right)=0-1=-1$

18.4 $\lim a_n=\lim\left(\frac{1-n}{n}\right)^2=\left[\lim\left(\frac{1}{n}-1\right)\right]^2=(0-1)^2=1$

18.5 $\lim an=\lim\frac{2}{n+1}=\frac{2}{\infty}=0$

18.6 $\lim an=\lim\frac{2n+3}{4n}=\lim\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4n}\right)=$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{\infty}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

18.7 $\lim a_n=\lim\left(\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=\lim 0=0$

18.8 $\lim a_n=\lim\left[(n+1)^2+n^3\right]=(+\infty)^2+(+\infty)^3=+\infty$

Pág. 144

19.1 $\lim\frac{n^2+1}{3n^2-2}=\lim\frac{n^2}{3n^2}=\frac{1}{3}$

19.2 $\lim\frac{1-n}{n^2+1}=\lim\frac{-n}{n^2}=\lim\frac{-1}{n}=0$

19.3 $\lim\frac{-n^2+3n}{n^2+1}=\lim\frac{-n^2}{n^2}=-1$

19.4 $\lim\frac{n^5+3n^3+5n}{1-n^3}=\lim\frac{n^5}{-n^3}=\lim(-n^2)=-\infty$

19.5 $\lim\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+3}{2n}\right)=\lim\frac{n+1}{n}-\lim\frac{n+3}{2n}=$

$=\lim\frac{n}{2}-\lim\frac{n}{2n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

19.6 $\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{n^3+5}{n^2}\right)=\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{n^3}{n^2}=$

$=0+\lim(n)=0+\infty=+\infty$

20.1 $\lim\sqrt{\frac{n^2+3}{4n^2+1}}=\sqrt{\lim\frac{n^2+3}{4n^2+1}}=\sqrt{\lim\frac{n^2}{4n^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

20.2 $\lim\frac{\sqrt{n+1}+n}{n}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}{n}=$

$=\lim\frac{n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n}{n}=\lim\frac{n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{n}=$

$=\sqrt{0+0}+1=1$

Pág. 145

21. $u_n=\sqrt{2n+3}\to+\infty$

$v_n=\frac{1}{2n+1}\to 0$

$w_n=\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

21.1 $\lim(u_n\times v_n)=\lim\left(\sqrt{2n+3}\times\frac{1}{2n+1}\right)=$

$=\lim\frac{\sqrt{2n+3}}{2n+1}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=$

$=\lim\frac{n\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{0+0}}{2+0}=0$

21.2 $\lim\frac{v_n}{w_n}=\lim\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}}=\lim\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{4n+2}=$

$=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+n}{4n+2}=\lim\frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+n}{4n+2}=$

$=\lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1\right)}{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{4+0}=0=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Pág. 146

22.1 $\lim(-2n^3+n^2+1)=\lim(-2n^3)=-\infty$

22.2 $\lim(n^8-n^5)=\lim(n^8)=+\infty$

22.3 $\lim\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n}=$

$=\lim\frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{2}{+\infty}=0$

22.4 $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$

$=\lim\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n}=$

$=\lim\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$

22.5 $\lim\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)=$

$=\lim\frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}{n+\sqrt{n^2+1}}=$

$=\lim\frac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{-1}{\infty}=0$

22.6 $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim\frac{n^2+n-\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=$$

$$=\lim\frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\lim\frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

Pág. 149

23.1 $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right]=$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$

$$=e\times1^{-1}=e$$

23.2 $\lim\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3}=$

$$=\lim\left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3}\right]=$$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\times\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3}=$$

$$=e\times1^{-3}=e$$

23.3 $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

23.4 $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n}=\lim\left(1+\frac{-3}{-3n}\right)^{-3n}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

23.5 $\lim\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^{n}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

23.6 $\lim\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{\frac{4}{3}}{n}\right)^{n}=e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4}=e\sqrt[3]{e}$

23.7 $\lim\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}=\lim\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)^{n^2}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}}=$

$$=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\lim\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}}=\frac{e}{e^5}=e^{-4}$$

23.8 $\lim\left(\frac{5n-2}{5n+3}\right)^{3n}=\lim\left[\left(\frac{1-\frac{2}{5n}}{1+\frac{3}{5n}}\right)^{n}\right]^{3}=\left[\lim\frac{\left(1-\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^{n}}\right]^{3}=$

$$=\left[\frac{\lim\left(1-\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^{n}}\right]^{3}=\left(\frac{e^{-\frac{2}{5}}}{e^{\frac{3}{5}}}\right)^{3}=\left(e^{-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}}\right)^{3}=\left(e^{-1}\right)^{3}=e^{-3}$$

Pág. 150

1.	(C)	**2.**	(A)		
3.	(D)	**4.**	(A)		
5.	(B)	**6.**	(D)	**7.**	(C)

Pág. 151

1.1	3	**2.1**	3		
2.2	4	**2.3**	0		
2.4	0	**2.5**	$+\infty$		
2.6	1	**2.7**	1	**2.8**	4

3.2 $S_n=\frac{1}{n^2+2}$ (por exemplo)

4.1 **a)** $P_1=(\pi+2)R$; $P_2=(\pi+2)\,\frac{R}{2}$; $P_3=(\pi+2)\,\frac{R}{4}$

b) $P_n=(\pi+2)\,R\times2^{1-n}$

c) 0

4.2 **a)** $a_1=\pi\frac{R^2}{2}$; $a_2=\pi\frac{R^2}{8}$; $a_3=\pi\frac{R^2}{32}$

b) $a_n=\pi\,R^2\times2^{1-2n}$

c) 0. A área tende para zero.