PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

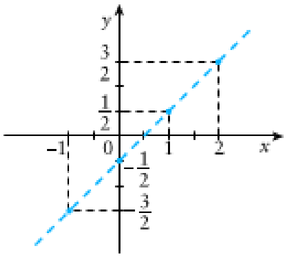
Capítulo 3

Pág. 45

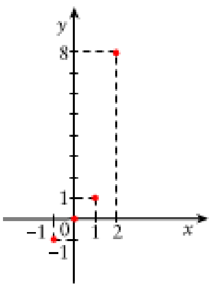
1.1 **a)**

x	$y = f(x)$
-1	$-\frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$

b)



1.2 **a)**



b) $g(x) = x^3$ com $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Pág. 48

2.1 Mínimo: $f(-3) = -3$
Máximo: $f(-6) = 7$

2.2 $C.S. = \{-6\}$.

2.3 $C.S. = \{-3\}$.

Pág. 49

3.1

$f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$$

3.2

$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x^2 - 1}$$

3.3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

3.4

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4.1 $f(x) = |x|$

f não é injectiva. Por exemplo, $f(-1) = f(1)$.

4.2 $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} \neq \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_g$, g é injectiva.

4.3 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

f não é injectiva. Por exemplo $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 = f(2)$.

5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$

Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ temos que $x_1 = x_2$. Então:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Pág. 52

6. Por exemplo:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

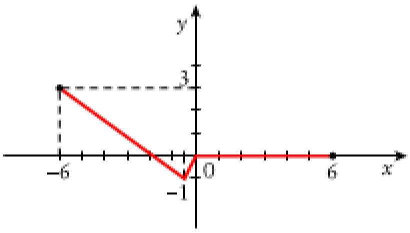
Pág. 54

1. Resposta: (C).

2. Resposta: (C).

3. Resposta: (D).

4.



Resposta: (D).

5. Resposta: (D).

6. Resposta: (B).

Pág. 55

1.1 $D_g =]-\infty, 6]$

1.2 $D'_g = [-2, +\infty[$

1.3 – 2

1.4 – 2, 4 e 8.

1.5 – 3 e 1.

1.6 [– 2, 0] e [4, 6].

1.7 $]-\infty, 2]$, [0, 4] e [6, 8].

1.8 1 e – 1.

1.9 0 e 8.

1.10 – 2.

1.11 – 2, 4 e 8.

2.1

a) $f(-1) = 3$; $f(2) = -1$. **b)** 0

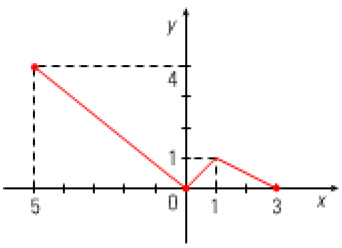
c) – 2 e 2. **d)** – 3,5 ; – 2 e 1.

2.2

x	– 4		– 3		–1,2		–0,2		2
$f(x)$	1	↘	– 1	↗	3	→	3	↘	– 1

Intervalos de monotonia:
f é crescente em [–3; –1,2], é decrescente em [–4, –3] e em [– 0,2 ; 2] e é constante em [– 1,2 ; –0,2].

3.1 Por exemplo:



3.2 0 e 3.

3.3 [– 5, 3].

3.4 0, 3.

4.1 3 h, 9 h, 15 h e 21 h.

4.2 10 min, 0 h, 12 h e 24 h.

4.3 6 min, 6 h e 18 h.

4.4 **a)** $D_f' = [6, 10]$

b) f é estritamente crescente em [6, 12] e em [18, 24].
f é estritamente decrescente em [0, 6] e em [12, 18].

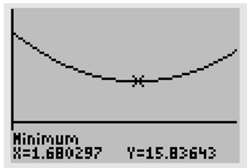
c)

x	0		6		12		18		24
$f(x)$	10	↘	6	↗	10	↘	6	↗	10

1.1. $x \in]0, 3[$.

1.2. $A = A_Ç + A_{\_} = \pi x^2 + (6-2x)^2 = \pi x^2 + 36 - 24x + 4x^2$
$A(x) = (4 + \pi)\, x^2 - 24x + 36.$

1.3.



A área é mínima para $x = 1{,}68$ cm.

2. $y = a\,(x-h)^2 + k$

$y = a\,(x-1)^2 - 4$

$5 = a\,(-2-1)^2 - 4$

$5 = 9a - 4 \Leftrightarrow a = 1$

$y = a\,(x-1)^2 - 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x - 3$
$y = x^2 - 2x - 3$

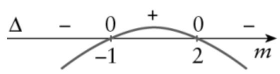
Pág. 60

1. $f(x) = mx^2 + 4x + 2m - 2$

$\Delta = 4^2 - 4m(2m-2) \Leftrightarrow \Delta = 16 - 8m^2 + 8m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -8m^2 + 8m + 16$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m - 1 \vee m = 2$



Resposta: (B).

2.1 $x^2 + 3x + 2 = 0$

$S = -3$; $P = 2$
Resposta: (D).

2.2 $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -1$

$S = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}; P = -\frac{1}{2}$

$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

Resposta: (A).

3. $x^2 - 4x + m = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m - 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4(m-1) \Leftrightarrow 16 - 4m + 4 = 20 - 4m$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 20 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 5$

Resposta: (A).

4. $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Resposta: (D).

5. $f(3,5) = 3,5$

$f(8) = -0,5(8-6)2 + 5,5 = -2 + 5,5 = 3,5$

Resposta: (D).

Pág. 61

1. $2x^2 + mx + 2$

$\Delta = m^2 - 4 \times 2 \times 2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = 4$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in]-4, 4[$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$.

1.1 $m \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

1.2 $m \in]-4, 4[$

1.3 $m = -4 \vee m = 4$

2. $(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(m-1)(1-m) \Leftrightarrow \Delta = 4 + 4(m-1)^2$

$\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação

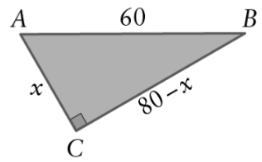
$x_1 \times x_2 = \frac{1-m}{m-1} = -1 < 0$

logo, x_1 e x_2 têm sinais contrários

$\Delta = 4 + 4(m-1)^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ e o produto das raízes é

$P = \frac{1-m}{m-1} = -1, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3.



$(80-x)^2 + x^2 = 60^2 \Leftrightarrow 6400 - 160x + x^2 + x^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 160x + 2800 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 80x + 1400 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 5600}}{2} \Leftrightarrow x \approx 25,86 \vee x \approx 54,14$

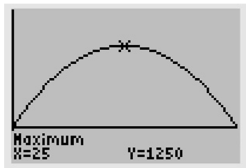
$\overline{BC} = 25,86$ m e $\overline{AC} = 54,14$ m ou vice-versa.

4.1 **a)** $2x + y$ é o comprimento da rede.

b) $100 - 2x$ é o comprimento do lado paralelo ao muro, em função do comprimento do outro lado.

c) $x(100 - 2x)$ é a área do rectângulo.

4.2 $A(x) = x(100 - 2x)$, $0 < x < 50$



$x = 25$; $y = 100 - 2 \times 25 = 50$

A área do terreno é máxima se as dimensões forem 25 m por 50 m.

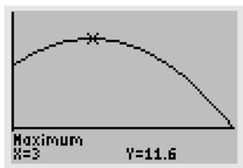
5. $h(x) = -0,4x^2 + 2,4x + 8$

5.1 $h(0) = 8$; 8 metros.

5.2 $h(5) = -0,4 \times 5^2 + 2,4 \times 5 + 8 = 10$

$h(5) = 10$; a 5 m, na horizontal, da linha da prancha, a atleta está a 10 metros de altura.

5.3



A altura máxima atingida pela atleta é 11,6 m.

5.4 $h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2,4 \pm \sqrt{2,4^2 + 12,8}}{-0,8} \Leftrightarrow x \approx 8,39$

8,39 m

5.5 $h(x) = 10 \Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x + 8 = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,4x^2 + 2,4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

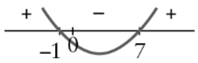
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$x = -1 \vee x = 5$. O atleta encontrou-se a 10 m de altura quando a distância à prancha, medida na horizontal, era de 1 m ou de 5 m.

5.6 $h(x) > 5{,}2 \Leftrightarrow -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 8 > 5{,}2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 2{,}8 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x \in [0,\ 7]$

A altura a qual se encontra o atleta é superior a 5,2 m enquanto a sua distância, na horizontal, à prancha for inferior a 7 m.

Pág. 63

1. São funções racionais as definidas por:

1.1 $f(x) = x^2 - 3$

1.2 $g(x) = \dfrac{-x+3}{2}$

1.3 $i(x) = \dfrac{\pi x + 3}{5x+1}$

Pág. 64

2.1 $f(x) = \dfrac{1}{3x+3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.2 $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.3 $h(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x^3}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

2.4 $i(x) = \dfrac{2}{3x^2 - 6x + 9}$

$D_i = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 6x + 9 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares:

$3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$. A equação é impossível.

2.5 $j(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 - 5x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 5\}$.

Cálculos auxiliares:

$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 5$

Pág. 66

3.1 $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

A recta de equação $x = -5$ é uma assimptota do gráfico de f.

3.2 $g(x) = \dfrac{1}{3 - x^2}$

$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

As rectas de equações $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ são assimptotas do gráfico de g.

3.3 $h(x) = \dfrac{9-x}{x^2 - 81}$

$9 - x = 0 \Leftrightarrow x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = -9 \vee x = 9$

A recta de equação $x = -9$ é uma assimptota do gráfico de h.

3.4 $i(x) = \dfrac{x-3}{x-3} = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

O gráfico de i não tem assimptotas verticais.

3.5 $j(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$

$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

O gráfico de j não tem assimptotas verticais.

Pág. 68

4.1 $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Numerador: $A(x) = 2$

Denominador: $B(x) = x - 1$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Assimptotas vertical: recta de equação $x = 1$

Grau de $B(x)$ > grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta de equação $y = 1$.

4.2 $g(x) = \dfrac{2x}{7-x}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = -x + 7$

$B(x) = 0 \wedge A(x) \neq 0 \Leftrightarrow -x + 7 = 0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x = 7$

Assimptota vertical: recta de equação $x = 7$

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta de equação $y = \dfrac{2}{-1} \Leftrightarrow y = -2$.

4.3 $h(x)=\dfrac{3x}{x^2-x-6}$

Numerador: $A(x) = 2x$

Denominador: $B(x) = x^2 - x - 6$

$B(x)=0 \wedge A(x)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \wedge 2x\neq 0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$

Assimptotas verticais: rectas de equações $x = -2$ e $x = 3$

Grau de $B(x)$ > grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta de equação $y = 0$.

4.4 $i(x)=\dfrac{-x^2}{x^2-3x+4}$

Numerador: $A(x) = -x^2$

Denominador: $B(x) = x^2 - 3x + 4$

$B(x)=0 \wedge A(x)\neq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+4=0 \wedge -x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

O gráfico de i não tem assimptotas verticais.

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta de equação $y = \dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow y=-1$.

4.5 $j(x)=\dfrac{x^3-3}{x^3}$

Numerador: $A(x) = x^3 - 3$

Denominador: $B(x) = x^3$

$B(x)=0 \wedge A(x)\neq 0 \Leftrightarrow x^3=0 \wedge x^3-3\neq 0 \Leftrightarrow x=0$

Assimptota vertical: recta de equação $x = 0$

Grau de $B(x)$ = grau de $A(x)$

Assimptota horizontal: recta de equação $y = \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow y=1$.

4.6 $k(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

Numerador: $A(x) = x^2$

Denominador: $B(x) = x - 1$

$B(x)=0 \wedge A(x)\neq 0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge x^2\neq 0 \Leftrightarrow x=1$

Assimptotas vertical: recta de equação $x = 1$

Grau de $B(x)$ < grau de $A(x)$

O gráfico de k não tem assimptotas horizontal.

Pág. 70

1. $g(x) = f(x-1) + 5$

O gráfico de g obtém-se por uma translação do gráfico de f associado ao vetor $\vec{u}=(1,5)$.

As assimptotas sofrem o mesmo deslocamento:

$x=-1 \quad x-1=-1 \Leftrightarrow x=0$

$y=2 \quad y-5=-1 \Leftrightarrow y=7$

Resposta: (A).

2. $f(x)=a+\dfrac{1}{x-b}$

As assimptotas do gráfico de f: $x = b$ e $y = a$.

Por observação do gráfico temos $a > 0$ e $b > 0$.

Resposta: (B).

3. $V = 2$ t sendo V em metros cúbicos e t em horas.

$2^2 \times h = 2t$

$h=\dfrac{t}{2}$.

Resposta: (B).

4. $C(h)=\dfrac{50h}{h^2+1}, h\geq 0$

$C(7) = 7$

Resposta: (D).

5. $f(x)=\dfrac{x^2-x+6}{x-2}=x+1+\dfrac{8}{x-2}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 - x + 6 & & x-2 \\ \cline{3-3} -x^2+2x & & x+1 \\ \hline x+6 & & \\ -x+2 & & \\ \hline 8 & & \end{array}$$

A recta de equação $y = x + 1$ é uma assimptota do gráfico de f.

Resposta: (A).

6. $\dfrac{4}{x^3-x}=\dfrac{A(x^2-1)+B(x^2-x)+C(x^2+x)}{x(x+1)(x-1)}$

$\dfrac{4}{x^3-x}=\dfrac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x^2-1)}$

$\dfrac{4}{x^3-x}=\dfrac{(A+B+C)x^2+(C-B)x-A}{x^3-x}$

Logo,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ C-B=0 \\ -A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=+4 \\ -B+C=0 \\ A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2C=4 \\ B=C \\ A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=2 \\ B=2 \\ A=-4 \end{cases}$$

Resposta: (A).

Pág. 71

1.1 $P(x)=\dfrac{x}{500+x},\ x>0$

Assimptota horizontal: $y = 1$.

Se o número de robalos introduzidos for significativamente elevado a percentagem desta espécie tende a aproximar-se de 100%.

Assimptota vertical: Não há porque –500 é o único zero do denominador e $D_P=\mathbb{R}^+$.

1.2 $P(x)\leq 0{,}2 \Leftrightarrow= \dfrac{x}{500+x}\leq 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{500+x}-0{,}2\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-0{,}2\times 500-0{,}2x}{500+x}\leq 0$

Como $500+x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$, temos:

$0{,}8x-100\leq 0 \Leftrightarrow 0{,}8x\leq 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq \dfrac{100}{0{,}8} \Leftrightarrow x\leq 125$

Podem ser introduzidos 125 robalos, no máximo.

2. $N(t)=\dfrac{50t+k}{t+25},t\geq 0$.

2.1 $N(0)=15 \Leftrightarrow \dfrac{k}{25}=15 \Leftrightarrow k=375$

2.2 $N(t)=\dfrac{50t+375}{t+25}$

$N(10)=\dfrac{50\times 10+375}{10+25}=25$

É de esperar que produza 25 peças.

2.3 A recta $y = 50$ é uma assimptota horizontal do gráfico de N.

Logo $b = 50$.

Com o decorrer do tempo de experiência o número de peças produzidas por hora tende a aproximar-se de 50.

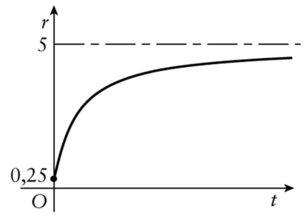
3.1 $r(t)=\dfrac{1+5t}{4+t}$

$r(0)=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

No momento em que a nódoa foi detectada tinha um raio de 0,25 cm.

3.2 A recta $y = 5$ é uma assimptota horizontal do gráfico da função r. Significa que com o decorrer do tempo o raio da mancha tende a aproximar-se de 5 cm.

3.3



3.4 $A = 40\ \text{cm}^2$

$\pi r^2 = 40$

$r=\sqrt{\dfrac{40}{\pi}}$

$r(t)=\sqrt{\dfrac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \dfrac{1+5t}{4+t}=\sqrt{\dfrac{40}{\pi}} \Leftrightarrow \dfrac{1+5t}{4+t}-\sqrt{\dfrac{40}{\pi}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+5t)\sqrt{\pi}-(4+t)\sqrt{40}}{4+t}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\pi}+5\sqrt{\pi}t-4\sqrt{40}-t\sqrt{40}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\left(5\sqrt{\pi}-\sqrt{40}\right)=4\sqrt{40}-\sqrt{\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{4\sqrt{40}-\sqrt{\pi}}{5\sqrt{\pi}-\sqrt{40}} \Rightarrow t\approx 9{,}3$

A área da mancha atingiu 40 cm^2 cerca de 9,3 segundos após ter sido detectada.

pág.72

1.1 Não. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ e $D_g=\mathbb{R}$.

1.2 Não. $\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|$.

Logo, $f(x)\neq g(x),\ \forall x\in\left]-\infty,-3\right[$.

1.3 $f(x)=\sqrt{(-2x)^2}=|-2x|=|2x|=g(x)$ e $D_f = D_g$.

As funções f e g são iguais.

1.4 As funções são iguais.

Pág. 74

2.1 $f(x) = 3x;\ g(x) = x+\dfrac{1}{2}$

$D_f=\mathbb{R},\ D_g=\mathbb{R},\ D_f\cap D_g=\mathbb{R}$,

$D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+x+\dfrac{1}{2}=4x+\dfrac{1}{2}$

$D_{f+g}:\mathbb{R}$

$f+g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 4x+\frac{1}{2}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x-\left(x+\frac{1}{2}\right)=2x-\frac{1}{2}$

$D_{f-g}:\mathbb{R}$

$f-g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x-\frac{1}{2}$

$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=3x\left(x+\frac{1}{2}\right)=3x^2+\frac{3}{2}x$

$D_{fg}=\mathbb{R}$

$fg:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x^2+\frac{3}{2}x$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x}{x+\frac{1}{2}}=\frac{3x}{\frac{2x+1}{2}}=\frac{6x}{2x+1}$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{6x}{2x+1}$

2.2 $f(x)=\frac{x+3}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=\frac{x}{x+4}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$D_f \cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$D_f \cap D_g \cap \{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$(f+g)(x)=\frac{x+3}{x}+\frac{x}{x+4}=$

$=\frac{(x+3)(x+4)+x^2}{x(x+4)}=\frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$

$D_{f+g}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$f+g:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{2x^2+7x+12}{x^2+4x}$

$(f-g)(x)=\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x+4}=\frac{(x+3)(x+4)-x^2}{x(x+4)}=\frac{7x+12}{x^2+4x}$

$D_{f-g}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$f-g:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{7x+12}{x^2+4x}$

$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x+3}{x}\times\frac{x}{x+4}=\frac{x+3}{x+4}$

$D_{fg}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$fg:\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x+3}{x+4}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x+4}}=\frac{(x+3)(x+4)}{x^2}=\frac{x^2+7x+12}{x^2}$

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x^2+7x+12}{x^2}$

2.3 $f(x)=\frac{2x-6}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=\frac{x+1}{x-3}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D_f \cap D_g \cap \{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\}$

$(f+g)(x)=\frac{2x-63}{x}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{(2x-6)(x-3)+x(x+1)}{x(x-3)}=$

$=\frac{3x^2-11x+18}{x^2-3x}$

$D_{f+g}=\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$f+g:\mathbb{R}\setminus\{0, 3\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{3x^2-11x+18}{x^2-3x}$

$(f-g)(x)=\frac{2x-6}{x}-\frac{x}{x-3}=\frac{(2x-6)(x-3)-x^2}{x(x-3)}=$

$=\frac{x^2-13x+18}{x^2-3x}$

$D_{f-g}:\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$f-g:\mathbb{R}\setminus\{0, 3\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x^2-13x+18}{x^2-3x}$

$(fg)(x)=\frac{2x-6}{x}\times\frac{x+1}{x-3}=\frac{2(x-3)(x+1)}{x(x-3)}=\frac{2x+2}{x}$

$D_{fg}:\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$

$fg:\mathbb{R}\setminus\{0,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{2x+2}{x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2x-6}{x}}{\frac{x+1}{x-3}}=\frac{2(x-3)(x-3)}{x(x+1)}=$

$=\frac{2x^2-12x+18}{x^2+x}$

$D_{\frac{f}{g}}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{2x^2-12x+18}{x^2+x}$

$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 4x+\frac{1}{2}$

$f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x-\frac{1}{2}$

$f\times g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 3x^2+\frac{3x}{2}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{6x}{2x+1}$

2.2 $f+g:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{2x^2+7x+12}{x(x+4)}$

$f-g:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{7x+12}{x(x+4)}$

$f\times g:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{x+3}{x(x+4)}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{x^2+7x+12}{x^2}$

2.3 $f+g:\mathrm{IR}\setminus\{0,3\}\to\mathrm{IR}$

$x\mapsto\frac{3x^2-11x+18}{x(x-3)}$

$f-g:\mathbb{R}\setminus\{0,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{x^2-13x+18}{x(x-3)}$

$f\times g:\mathbb{R}\setminus\{0,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{2x+2}{x}$

$\frac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{-1,0,3\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{2x^2-12x+18}{x(x+1)}$

Pág. 74

3.1 **a)** $f(x)=x-1$ e $g(x)=2x+\frac{1}{2}$

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f\left(-4+\frac{1}{2}\right)=$

$=f\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{7}{2}-1=-\frac{9}{2}$

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(-2-1)=g(-3)=-6+\frac{1}{2}=-\frac{11}{2}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2}$ e $g(x)=\frac{1}{x+1}$

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f\left(\frac{1}{-2+1}\right)=$

$=f(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g\left(\sqrt{(-2)^2}=g(2)\right)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

3.2 **a)** $f(x)=x^2+1,\ D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=2x-2,\ D_g=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-2)=(2x-2)^2+1=4x^2-8x+5$

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge(2x-2)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 4x^2 - 8x + 5$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 2(x^2+1) - 2 = 2x^2$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$g(x) = \sqrt{x}, D_g = \mathbb{R}_0^+$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 4\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\}$

Cálculo auxiliar:

$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$

$f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-4}}$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \wedge \dfrac{1}{x-4} \geq 0\right\} =]4, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$\dfrac{1}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

$g \circ f :]4, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x-4}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = \sqrt{x+1}, D_g = [-1, +\infty[$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge \sqrt{x+1} \neq 0\} =]-1, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f \circ g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \dfrac{1}{x} \geq -1\right\} =]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$\dfrac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{x} \geq 0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{1+x}{x}$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$g \circ f :]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$

3.3 $f(x) = x - 2, D_f = \mathbb{R}$

Seja $g(x) = ax + b, D_g = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = (gof)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(ax+b) = g(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax + b - 2 = a(x-2) + b, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax + b - 2 = ax - 2a + b, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b - 2 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$

Qualquer função g definida por $g(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$ é permutável com f.

Pág. 78

4.1 $f(x) = -x+1,\ D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \pi x+3,\ D_g = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\pi x+3) = -(\pi x+3)+1 = -\pi x-2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+1) =$

$= \pi(x-1)+3 = -\pi x+\pi+3$

Embora $D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

$\exists x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

f e g não são permutáveis.

4.2 $f(x) = \sqrt{x},\ D_f = [0,+\infty[$

$g(x) = \dfrac{1}{x-3},\ D_g = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge \dfrac{1}{x-3} \geq 0\right\} =]3,+\infty[$

$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 3\} = [0,+\infty[\setminus\{9\}$

$D_{fog} \neq D_{gof} \Rightarrow$ f e g não são permutáveis.

5. Por exemplo:

$f(x) = \sqrt{x-2},\ D_f = [2,+\infty[$

$g(x) = 1-|x|,\ D_g = \mathbb{R}$

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge 1-|x| \geq 2\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq -1\} = \varnothing$

Sendo $D_{fog} = \varnothing$, fog não existe.

$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \wedge \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2,+\infty[$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-2}\right) = 1-\left|\sqrt{x-2}\right|$

$g \circ f : [2,+\infty[\ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1-\left|\sqrt{x-2}\right|$

Pág. 81

6.1 $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{6}{x} = y$

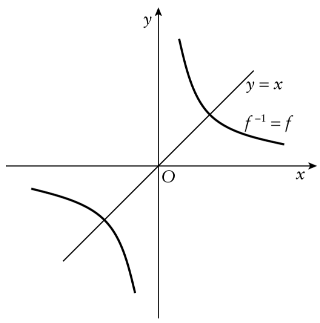
$x = \dfrac{6}{y} \Leftrightarrow xy = 6 \Leftrightarrow y = \dfrac{6}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{6}{x}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{6}{x}$



6.2 $g(x) = 6x+1$

$D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = y \Leftrightarrow 6x+1 = y$

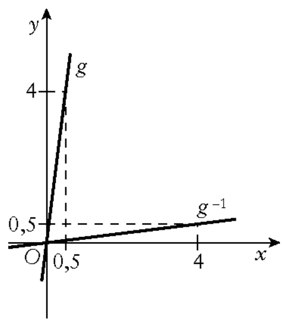
$6y+1 = x \Leftrightarrow 6y = x-1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x-1}{6}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{6}$

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x-1}{6}$



6.3 $h(x) = \dfrac{2}{x-3}$

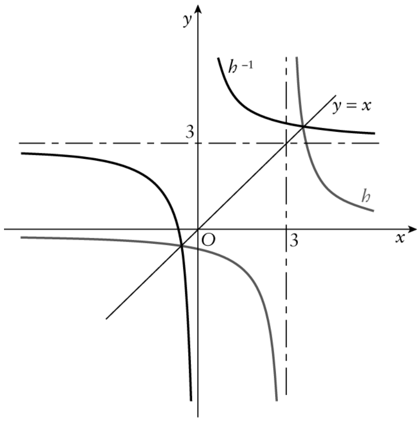
$D_h = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-3} = y$

$\dfrac{2}{y-3} = x \Leftrightarrow 2 = xy-3x \Leftrightarrow xy = 2+3x \Leftrightarrow y = \dfrac{2+3x}{x}$

$$h^{-1}(x) = \frac{2+3x}{x}$$

$$D_{h^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Pág. 82

1.

x	$-\infty$	0		a		b	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–		+	+	+
$g(x)$	–	–	–	–	–	0	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	–	0	+	s.s	–	s.s	+

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow x \in [0, a[\cup]b, +\infty[$$

Pode ser $a = 1$ e $b = 2$.

Resposta: (D).

2.1 $f(1) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$

$f(-2) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = -2$

$f^{-1}(0) - f^{-1}(2) = 1 + 2 = 3$

Resposta: (C).

2.2 $g(x) = 1 + \frac{2}{x-3}$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 1 + \frac{2}{-1-3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Resposta: (A).

3.1 $(gof)(29) = g(f(29)) = g\left(\sqrt[3]{-2+29}\right) = g(3) = 2$

Resposta: (C).

3.2 $f(x) = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-2+x} = -2 \Leftrightarrow -2 + x = (-2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8 + 2 \Leftrightarrow x = -6$

$f(-6) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -6$

$f^{-1}(-2) + f(-6) = -6 + \sqrt[3]{-2-6}$

$= -6 + \sqrt[3]{-8} = -6 - 2 = -8$

Resposta: (B).

4. $D_f = \mathbb{R}$ e f é injectiva.

Se f é injectiva a equação $f(x) = 3$ tem, no máximo, uma solução. Como a é solução da equação, esta é única.

Resposta: (D).

5. $f(-1) \neq g(-1) \Leftrightarrow f(-1) - g(-1) \neq 0 \Leftrightarrow (f-g)(-1) \neq 0$

– 1 não é zero de $f - g$.

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$

1 é zero de f. Logo não é zero de $\frac{g}{f}$.

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 0 \neq -1$

Em]0, 4[, g tem dois zeros e f tem um, todos diferentes. Logo $f \times g$ tem três zeros.

Resposta: (D).

Pág. 83

1. $a(t) = \frac{11t+6}{t+1}, t \geq 0; b(t) = \frac{t+9}{t+3}, t \geq 0$.

1.1 No início de 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A, é dado por $a(0) = 6$. Logo, no início de 2009 existiam 6000 animais da espécie A.

No início de 2010, o número de animais, em milhares, da espécie A era dado por $a(1) = 8{,}5$ pelo que havia, no início de 2010, 8500 animais da espécie A.

Logo, desde o início do ano de 2009 até ao início do ano de 2010, o número de animais da espécie A aumentou 2500.

Como, nesse intervalo de tempo, morreram 500 animais da espécie A, podemos concluir que no intervalo de tempo em causa, nasceram 3000 animais da espécie A (2500 + 500 = 3000).

1.2 $a(t)=\dfrac{11t+6}{t+1}=11-\dfrac{5}{t+1}$

$$\begin{array}{r|l} 11t+6 & t+1 \\ \hline -11t-11 & 11 \\ -5 & \end{array}$$

A recta de equação $y = 11$ é uma assimptota horizontal do gráfico de a.

$b(t)=\dfrac{t+9}{t+3}=1+\dfrac{6}{t+3}$

$$\begin{array}{r|l} t+9 & t+3 \\ \hline -t-3 & 1 \\ 6 & \end{array}$$

A recta de equação $y = 1$ é uma assimptota horizontal do gráfico de b.

Podemos então concluir que, com o decorrer do tempo o número de animais da espécie A tende para 11 000 enquanto que o número de animais da espécie B tende para 1000.

Logo, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B, com o decorrer do tempo, tende para 10 000.

1.3 $(a\circ b)(t)=a(b(t))=a\left(\dfrac{t+9}{t+3}\right)=\dfrac{11\left(\dfrac{t+9}{t+3}\right)+6}{\dfrac{t+9}{t+3}+1}=$

$=\dfrac{\dfrac{11t+99}{t+3}+6}{\dfrac{t+9+t+3}{t+3}}=\dfrac{\dfrac{11t+99+6t+18}{t+3}}{\dfrac{2t+12}{t+3}}=\dfrac{17t+117}{2t+12}$

$D_{aob}=\{t\in \mathbb{R}: t\in D_b \wedge b(t)\in D_a\}=$

$=\left\{t\in \mathbb{R}: t\neq -3 \wedge \dfrac{t+9}{t+3}\neq -1\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-6,-3\}$

Cálculo auxiliar:

$\dfrac{t+9}{t+3}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{t+9}{t+3}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{t+9+t+3}{t+3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2t+12}{t+3}=0 \Leftrightarrow 2t+12=0 \wedge t\neq -3 \Leftrightarrow t=-6$

$(a\circ b)(t)=\dfrac{17t+117}{2t+12}; D_{aob}=\mathbb{R}\setminus\{-6,-3\}$.

1.4 Se $x\neq -1$

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{11x+6}{x+1}=y$

Se $y\neq -1$

$\dfrac{11y+6}{y+1}=x \Leftrightarrow 11y+6=xy+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11y-xy=x-6 \Leftrightarrow y(11-x)=x-6 \Leftrightarrow y=\dfrac{x-6}{11-x}$

$f(-1)=11 \Leftrightarrow f^{-1}(11)=-1$

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-6}{11-x} & \text{se } x\neq 11\\ -1 & \text{se } x=11\end{cases}$

2.1 Recta OC:

$m=\dfrac{4}{3}$

$y=\dfrac{4}{3}x$

$C\left(x,\dfrac{4}{3}x\right)$

$\overline{OB}=12$

A altura do triângulo $[OBC]$ relativa ao vértice C é a ordenada deste ponto, ou seja, é igual a $\dfrac{4}{3}x$.

$A_{[OBC]}=\dfrac{12\times\dfrac{4}{3}x}{2}=6\times\dfrac{4}{3}x=8x$

$A(x) = 8x$

2.2 $\overline{OB}=12$

$\overline{OC}=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{4}{3}x\right)^2}=\sqrt{x^2+\dfrac{16}{9}x^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{25}{9}x^2}=\dfrac{5}{3}|x|=\dfrac{5}{3}x$

$\overline{BC}=\sqrt{(x-12)^2+\left(\dfrac{4}{3}x-0\right)^2}=$

$=\sqrt{x^2-24x+144+\dfrac{16}{9}x^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{25}{9}x^2-24x+144}$

$P(x)=12+\dfrac{5}{3}x+\sqrt{\dfrac{25}{9}x^2-24x+144}$

3. $N(t)=T^2+125T+100, 20\leq T\leq 32$

$T(h)=4h+10, 0<h<6$.

3.1 $(N\circ T)(h)=N(T(h))=N(4h+10)$

$=(4h+10)^2+125(4h+10)+100$

$=16h^2+580h+1450$.

3.2 $(N\circ T)(4)=16\times 16+580\times 4+1450=4026$

4026 bactérias

3.3 $(N\circ T)(h)=5000\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16h^2+580h+1450=5000$

$\Leftrightarrow 16h^2+580h-3550=0$

$\Leftrightarrow h\approx 5{,}3554$

$0{,}3554\times 60\approx 21$.

Terão de decorrer 5 h 21 min.

Pág. 86

1.1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{27}\Leftrightarrow 3^{-x}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x}=3^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow -x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

1.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{-x+1}\Leftrightarrow 2^{-x}>2^{-x+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x>-x+1\Leftrightarrow 0x>1$, impossível.

$S=\{\}$

Pág. 87

2.1 $2^x=32\Leftrightarrow 2^x=2^5\Leftrightarrow x=5$

$S=\{5\}$.

2.2 $5^{-2x}=25^{x+2}\Leftrightarrow 5^{-2x}=\left(5^2\right)^{x+2}\Leftrightarrow$

$5^{-2x}=5^{2x+4}\Leftrightarrow -2x=2x+4\Leftrightarrow$

$-4x=4\Leftrightarrow x=-1$

$S=\{-1\}$

3. $M=Ce^{rt}$

$t=3$, $C=1000$, $r=0{,}05$

$M=1000\times e^{0{,}05\times 3}\Leftrightarrow M\approx 1161{,}83$ meticais.

Pág. 88

4. $M(3)=\frac{100}{1+39e^{-0{,}49\times 3}}=10{,}033$

Pág. 91

5.1 $\log_{\frac{1}{2}}4+\log_3 243+\log_{216}6=$

Cálculos auxiliares

$\log_3 243+=\log_3\left(3^5\right)=5$

$\log_{216}6=x\Leftrightarrow 216^x=6\Leftrightarrow 6^{3x}=6\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}4+\log_3 243+\log_{216}6=-2+5+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

5.2 $\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}+\log_4\sqrt{2}$

Cálculos auxiliares

$\log_{\frac{1}{2}}8=x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x=8\Leftrightarrow 2^{-x}=2^3\Leftrightarrow x=-3$

$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$

$\log_4\sqrt{2}=x\Leftrightarrow 4^x=\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}+\log_4\sqrt{2}=-3+2+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$

Pág. 92

6.1 $\log_x 81=4\Leftrightarrow x^4=81\Leftrightarrow x^4=3^4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3$

$S=\{3\}$

6.2 $\log_x\frac{1}{3}=-2\Leftrightarrow x^{-2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

$S=\{\sqrt{3}\}$

Pág. 93

7.1 $2\ln(x+3)=\ln(1-3x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln(x+3)^2=\ln(1-3x)\wedge x+3>0\wedge 1-3x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+3)^2=1-3x\wedge x>-3\wedge x<\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+3x-1=0\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x+8=0\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=-8\vee x=-1)\wedge\ x\in\left]-3,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1$, $S=\{-1\}$

7.2 $\ln\left(\frac{5-x}{e^x}\right)=-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)-\ln(e^x)=-x \wedge 5-x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)-x=-x \wedge x<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(5-x)=0 \wedge x<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-x=e^0 \wedge x<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-x=1 \wedge x<5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4 \wedge x<5 \Leftrightarrow x=4$, $S=\{4\}$

Pág. 94

8. $2\ln(x)-\ln(x+3)\leq \ln(x+5)$

Domínio: $x>0 \wedge x+3>0 \wedge x+5>0 \Leftrightarrow x>0$

$D=\mathbb{R}^+$

$\ln\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\leq \ln(x+5) \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}\leq x+5 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}-(x+5)\leq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-(x+5)(x+3)}{x+3}\leq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x^2-8x-15}{x+3}\leq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8x+15}{x+3}\geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x<-3 \vee x\geq -\frac{15}{8}\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow x>0$

Pág. 95

9. $M=-3{,}64+0{,}69\log_{10}E$

9.1 $E=3\times 10^{10}$

$M=-3{,}64+0{,}69\log_{10}(3\times 10^{10})$

$M=3{,}59$

9.2 $M=7$

$7=-3{,}64+0{,}69\log_{10}E$

$\frac{7+3{,}64}{0{,}69}\ \log_{10}E$

$\log_{10}E=15{,}42$

$E=10^{15{,}42}$

$E=2{,}6\times 10^{15}$

Pág. 99

10. $f(x)=-2+2\sin x$

10.1 $D_f=\mathbb{R}$

10.2 $-1\leq \sin x\leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\leq 2\sin x\leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\leq -2+2\sin x\leq 0$

$D'_f=[-4, 0]$

10.3 $f(x+P)=f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2+2\sin(x+P)=-2+\sin x \Leftrightarrow$

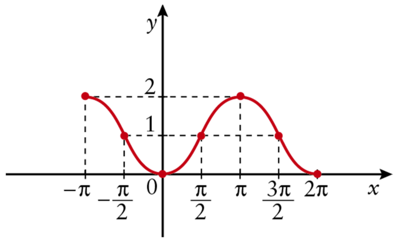
$\Leftrightarrow \sin(x+P)=\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+P=x+2\pi K$, $K\in\mathbb{Z}$

Período: 2π

Pág.102

11. $f(x)=1-\cos x$, $x\in[-\pi, 2\pi]$



11.1 $x\in[0, \pi]$

11.2 $f(x)=0\Leftrightarrow 1-\cos x=0\Leftrightarrow$

$\cos x=1\Leftrightarrow x=0+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$x\in[0, \pi]$: $k=0$, $x=0$

$k=1$, $x=2\pi$

Zeros: 0 e 2π.

11.3 $-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow 1\geq -\cos x\geq -1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\geq 1-\cos x\geq 0$

$D'_f=[0, 2]$.

$f(x)=2\Leftrightarrow 1-\cos x=2\Leftrightarrow$

$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$x\in[0, 2\pi]$: $k=-1$, $x=-\pi$

$k=0$, $x=\pi$

$-\pi$ e π.

12. $f(x)=1+\operatorname{tg}x, x\in[-\pi, 2\pi]$

12.1 $f(x)=0\Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}x=0\Leftrightarrow$

$\operatorname{tg}x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$x\in[-\pi, 2\pi]$: $k=-1$, $x=\frac{\pi}{4}-\pi\Leftrightarrow=-\frac{3\pi}{4}$

$k=0$, $x=\frac{\pi}{4}$

$k=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi\Leftrightarrow=\frac{5\pi}{4}$

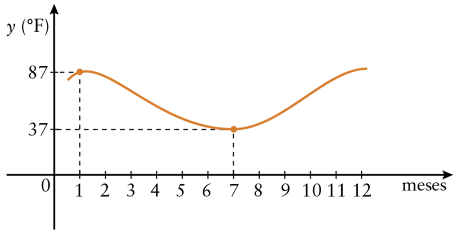
Zeros: $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Pág.105

12.2 Não tem máximo.

13. 37 °F em julho e 87 °F em janeiro.

13.1



13.2 $y = a\cos\left[b(x-c)\right]+d$

b: período $\frac{2\pi}{b} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = b \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$

Máximo: 87 $\left(\cos\left[b(x-c)\right]=1\right) \rightarrow a+d=87$

Mínimo: 37 $\left(\cos\left[b(x-c)\right]=-1\right) \rightarrow -a+d=37$

$$\begin{cases} a+d=87 \\ -a+d=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=87-d \\ 2d=124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=87-d \\ d=62 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=25 \\ d=62 \end{cases}, y = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-c)\right]+62$$

y é o máximo quando x = 1 então:

$$87 = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(1-c)\right]+62 \Leftrightarrow$$

$\cos\left[\frac{\pi}{6}(1-c)\right]=1$, o menor valor que verifica esta condição é o então $\frac{\pi}{6}(1-c)=0 \Leftrightarrow 1-c=0 \Leftrightarrow c=1$

$$y = 25\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-1)\right]+62 \text{ .}$$

Pág.106

1. $P(t) = 10\,000e^{0,02t}$

$A(t) = 30\,625t + 2000$

P - população
A - Abastecimento de alimentos
t – tempo(anos)

t	P	A
0	10 000	2000
1	10 202	32 625
2	10 408	63 250
5	11 052	155 125
10	12 214	308 250
20	14 918	614 500
40	22 255	$1,23 \cdot 10^6$
80	49 530	$2,45 \cdot 10^6$
200	545 982	$6,13 \cdot 10^6$
300	$4,03 \cdot 10^6$	$9,19 \cdot 10^6$
400	$2,98 \cdot 10^7$	$1,23 \cdot 10^7$
350	$1,1 \cdot 10^7$	$1,07 \cdot 10^7$
349	$1,07 \cdot 10^7$	$1,07 \cdot 10^7$

2. $N(t) = 2\,000\,000e^{-0,558\times5} \approx 122\,842$

3. $f(t) = 50\,(1 - e^{-0,2t})$

$f(20) = 50\,(1 - e^{-0,2\times20}) = 49,08$ m

4. $n(t) = 1,36\left(\frac{e}{2,5}\right)^t$

$n(40) = 1,36\left(\frac{e}{2,5}\right)^{40} = 38,7 \approx 39$

5. x - ano

y - população (mil milhões)

x	y
1900	1,65
1925	3,30
1950	6,60
1975	13,20
2000	26,40

O valor da população em 2000 seria 26,40 milhares de milhões.

6.1 $a(0) = \frac{20}{1+4} = 4$

$b(0) = \frac{20}{1+9} = 3$

6.2 $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{20}{1+4e^{-0,07t}} = \frac{20}{1+4e^{-0,07(+\infty)t}} = \frac{20}{1+4e^{-\infty}}$

$= \frac{20}{1+4\times0} = \frac{20}{1} = 20$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{20}{1+9e^{-0,03t}} = \frac{30}{1+9\times0} = 30$

6.3 96 dias

7.1 $N(5) = \frac{200}{1+4e^{-0,12\times5}} = 63$

7.2 $100 = \frac{200}{1+4e^{-0,12t}} \Leftrightarrow 1+4e^{-0,13} = \frac{200}{100}$

$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-0,13t} = 0,25 \Leftrightarrow -0,12t = ln\,0,25$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,25}{-0,12} \Leftrightarrow t = 11,5 \approx 12$

7.3 Não, a população de veados, nunca pode ultrapassar os 200 indivíduos.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{200}{9+4e^{-0,12t}} = 200$.

8.1 Sem produção não há lucro.

$0 = \log_{10}(100) + k$

$\Leftrightarrow k = -log_{10} 100$

$\Leftrightarrow k = -2$

8.2 $L(5000) = \log_{10}(100 + 5000) - 2$

$L(5000) = \log_{10}(5100) - 2$

$L(5000) = 1{,}707$ dezenas de euros

8.3 $1 = \log_{10}(100 + n) - 2$

$3 = \log_{10}(100 + n)$

$10^3 = 100 + n$

$1000 = 100 + n$

$n = 900$

9.1 $M = -3{,}64 + 0{,}69 \log_{10}(5 \times 10^{12})$; $M = 5{,}122$.

9.2 $4 = -3{,}64 + 0{,}69 \log_{10} E$

$\log_{10} E = \dfrac{4 + 3{,}64}{0{,}69} \Leftrightarrow \log_{10} E = 21{,}1$

$\Leftrightarrow E = 10^{21{,}1} = 1{,}259 \times 10^{11}$

10. $A = -0{,}52 + 0{,}55 \ln p$

$A = -0{,}52 + 0{,}55 \ln 10$

$A = 0{,}746$ m