PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

Capítulo 2

Pág. 20

1.1 $\frac{P_3 + P_5}{3!} = \frac{3! + 5!}{3!}$

$= 1 + 5 \times 4 = 21$

1.2 abc, acb, bac, bca, cab, cba

1.3 Não há letras repetidas: $P_6 = 6! = 720$.

Pág. 21

2.1 **a)** ${}^6A_2 = 6 \times 5 = 30$

b) ${}^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

c) ${}^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

2.2 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 e 43.

Pág. 22

3. $42\,{}^nA_3 = {}^nA_5$

$\Leftrightarrow 42\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n!}{(n-5)!}$

$\Leftrightarrow \frac{42}{(n-3)(n-4)(n-5)!} = \frac{1}{(n-5)!}$

$\Leftrightarrow 42 = (n-3)(n-4)$

$\Leftrightarrow n^2 - 4n - 3n + 12 - 42 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 7n - 30 = 0$

$\Leftrightarrow n = -3 \vee n = 10$

$\Leftrightarrow n = 10$

4. ${}^9A_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

Pág. 24

5.1 a) $\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2} = 15$

b) ${}^{30}C_0 = \frac{30!}{0!30!} = 1$

c) ${}^{100}C_{100} = \frac{100!}{100!0!} = 1$

d) $\frac{{}^{33}C_{10} \times P_{23}}{{}^{34}A_8 \times {}^{25}C_{10} \times P_{15}}$

$= \frac{\frac{33!}{23!10!} \times 23!}{\frac{34!}{26!} \times \frac{25!}{15!10!} \times 15!}$

$= \frac{33!26 \times 25!10!}{10!34 \times 33!25!} = \frac{26}{34} = \frac{13}{17}$

5.2 **a)** ${}^nC_0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$

b) ${}^{30}C_0 = \frac{30!}{0!30!} = 1$

c) ${}^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

Pág. 25

6.1 ${}^{49}C_6 = 13\,983\,816$

6.2 ${}^{10}C_5 = 252$

7. ${}^nC_2 = 120 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 120$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 240 = 0$

$\Leftrightarrow n = -15 \vee n = 16$

$\Leftrightarrow n = 16$

Pág. 26

8.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$2^7 = 128$

Pág. 27

9. $2\,{}^nC_2 = 5\,{}^{n-2}C_2$

$\Leftrightarrow 2\frac{{}^nA_2}{2!} = 5\frac{{}^{n-2}A_2}{2!} \wedge n \geq 2 \wedge n - 2 \geq 2$

$\Leftrightarrow 2n(n-1) = 5(n-2)(n-3) \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 2n = 5n^2 - 15n - 10n + 30 \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow 3n^2 - 23n + 30 = 0 \wedge n \geq 4$

$\Leftrightarrow \left(n = 6 \vee n = \frac{5}{3}\right) \wedge n \geq 4 \Leftrightarrow n = 6$

Pág. 28

10.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n = 4 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n = 5 \end{array}$$

10.1 $(2a+b)^5 = \sum_{p=0}^{5} 5C_p (2a)^{5-p} b^p =$

$= 1\,(2a)^5 b^0 + 5\,(2a)^4 b^1 + 10\,(2a)^3 b^2 +$

$+ 10\,(2a)^2 b^3 + 5\,(2a)\,b^4 + 1\,(2a)^0 b^5 =$

$= 32a^5 + 80a^4 b + 80a^3 b^2 + 40a^2 b^3 + 10ab^4 + b^5$

10.2 $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5 = \sum_{p=0}^{5} {}^5C_p (2a)^{5-p} b^p =$

$= 3^5 + 5 \times 3^4 \left(\frac{x}{3}\right) + 10 \times 3^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 10 \times 3^2 \times$

$\times \left(\frac{x}{3}\right)^3 + 5 \times 3 \times \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \left(\frac{x}{3}\right)^5 =$

$= 243 + 135x + 30x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{27}x^4 + \frac{1}{243}x^5$

10.3 $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4 = \sum_{p=0}^{4} {}^4C_p \left(\sqrt{x}\right)^{4-p} \left(\sqrt{y}\right)^p =$

$= \left(\sqrt{x}\right)^4 + 4\left(\sqrt{x}\right)^3 \sqrt{y} + 6\left(\sqrt{x}\right)^2 \left(\sqrt{y}\right)^2 +$

$+4\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}\right)^3 + \left(\sqrt{y}\right)^4 =$

$= x^2 + 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy + 4\sqrt{x}y\sqrt{y} + y^2$

$(x \geq 0 \text{ e } y \geq 0)$

Pág. 29

11.1 22 termos.

11.2 $\left(\sqrt{3x}+1\right)^{13}$

$T_{p+1} = {}^{13}C_p \left(\sqrt{3x}\right)^{13-p} 1^p$

$T_8 = {}^{13}C_7 \left(\sqrt{3x}\right)^6 1^7 = 1716(3x)^3 = 46\,332\,x^3$

11.3 $(3x+y)^6$; $T_{p+1} = {}^6C_p (3x)^{6-p} y^p$

$p = \frac{6}{2} = 3$

$T_4 = {}^6C_3 (3x)^3 y^3 = 20 \times 27 x^3 y^3 = 540 x^3 y^3$

11.4 $(x+y)^n$

$T_{p+1} = {}^nC_p x^{n-p} y^p$

$\begin{cases} n-p=10 \\ p=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow n=15$

Pág. 30

1. ${}^9A_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

Resposta: (A).

2. $P_3 = 6$ (não há resultados repetidos

Resposta: (D).

3.

1.º A	2.º A	3.º A	
7	7	2	Começados por 77
7	2	9	Começados por 78 ou 79
2	9	9	Começados por 8 ou 9

$2 + 2 \times 9 + 2 \times 9 \times 9 = 182$

Resposta: (D).

4. ANÁLISE

As 3 consoantes (NLS) podem trocar entre si de $P_3 = 6$ maneiras diferentes.

As vogais (AAIE) podem trocar entre si de $\frac{P_4}{P_2} = 12$ maneiras diferentes.

O grupo das consoantes pode ocupar uma de 5 posições entre as vogais (.A.A.I.E.).

$6 \times 12 \times 5 = 360$

Resposta: (B).

5. Há 6 hipóteses para A

5 para B (diferente de A)

4 para C (diferente de A e B)

5 para D (diferente de C)

5 para E (diferente de D)

$6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 5 = 3000$

Resposta: (C).

6. 9 6 2 2 2 5 5 9 9

$\frac{P_7}{P_3 \times P_2 \times P_2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$

Resposta: (A).

7. ${}^7C_2 = 21$

Resposta: (D).

8. $P_2 \times 4 \times P_2 \times P_3 = 96$

P_3 → Restantes 3 em 3 lugares

P_2 → Hipóteses de ocupar os extremos

4 → Hipóteses de colocar dois que ficam juntos

P_2 → Os dois juntos podem trocar entre si

Resposta: (C).

9. Há 3 casos a considerar

$\frac{P}{4}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}\ \frac{I}{5}$

$\frac{P}{4}\ \frac{I}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}$

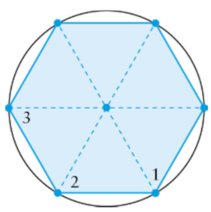
$\frac{I}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{P}{5}\ \frac{I}{5}$

$4 \times 5^3 + 4 \times 5^3 + 5^4 = 1625$

Resposta: (A).

Pág. 31

1.



${}^7C_3 - 3 = 35 - 3 = 32$

→ Há 3 subconjuntos de 3 pontos diferentes.

2. $\frac{1.^{\text{o}} B}{8}\ \frac{2.^{\text{o}} B}{8}\ \frac{3.^{\text{o}} B}{8}\ \frac{4.^{\text{o}} B}{8}$

$8 \times 8 \times 8 \times 8$ ou ${}^8A'_4 = 8^4 = 4096$

3. $P_3 \times P_5 \times P_6 = 3! \times 5! \times 6! = 518\,400$

4. Há seis sabores diferentes.

4.1 **a)** A ordem da escolha não interessa.

$^{6}C_3 = 20$

b) $^{6}C_2 \times 2 + {}^{6}C_3 = 15 \times 2 + 20 = 50$

3 sabores diferentes

2 sabores A e B (A + 2 B ou 2 A + B)

4.2 Agora interessa a ordem:

$^{6}A_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

Pelo menos um sabor diferente dos outros

$^{6}C_2 \times 2 \times 3 + {}^{6}A_3 = 90 + 120 = 210$

3 sabores diferentes

Posição da bola diferente

2 A e B ou A e 2 B

Escolha de dois sabores A e B

5. AMORES

S <u>A</u> <u>M</u> <u>O</u> <u>R</u> <u>E</u> $P_5 = 120$

Há 3 vogais: $3 \times P_5 = 360$

120 ; 360.

6. Rapazes Meninas

10 7

6.1 $^{10}C_3 = 252$

6.2 $^{7}C_5 = 21$

6.3 $^{10}C_2 \times {}^{7}C_3 + {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 = 1575 + 2520 = 4095$

3 rapazes + 2 meninas

2 rapazes + 3 meninas

6.4 $^{17}C_5 - \left({}^{10}C_5 \times {}^{7}C_0 + {}^{10}C_4 \times {}^{7}C_1\right)$

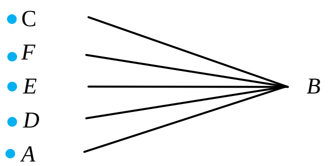
Comissões com uma menina

Comissões só com rapazes

Todas as comissões

= 6188 – (252 + 1470) = 4466

7.



ABD, ABE,…

B é fixo.

Há que escolher mais dois pontos em {A, D, E, F, C}

$^{5}C_2 = 10$

8. $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^{14}$

$T_{p+1} = {}^{14}C_p \left(\frac{x}{2}\right)^{14-p}\left(-\frac{2}{x}\right)^{p}$

$T_7 = {}^{14}C_6 \left(\frac{x}{2}\right)^{8}\left(-\frac{2}{x}\right)^{6} = 3003\frac{x^8}{2^8}\frac{2^6}{x^6} = 3003\frac{x^2}{2^2} = \frac{3003}{4}x^2$

9. A soma dos três últimos elementos é igual à soma dos três primeiros.

$^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 106$

$1 + {}^{n+1}C_2 = 106$

$\frac{(n+1)\times n}{2} = 105$

$n^2 + n - 210 = 0$

$n = 14$

$1 + {}^{n}C_1 = 1 + 14 = 15$

Pág. 39

12.1 Blusas Saias Casacos

3 2 2

12.2 Número de casos possíveis: 12

Número de casos favoráveis

Apenas o azul e verde são cores comuns às três peças de roupa e só existe uma peça de cada cor. Logo, há 2 casos possíveis (verde ou azul).

$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

13. Trata-se de calcular a probabilidade de a soma dos números saídos nos dois últimos lançamentos ser 8.

(5 + 3 + 8 = 16).

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P = \frac{5}{36}$

Pág. 40

1. Casos possíveis: $^{8}C_3 = 56$

Casos favoráveis: $^{6}C_1 = 6$ (Nos restantes seis é escolhido um)

$P = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

Resposta: (D).

2. Casos possíveis: ${}^9C_5 = 126$

Casos favoráveis

Pirâmide Outros

$$\left.\begin{array}{cc} \underline{5} & \underline{4} \\ \underline{2} & \underline{3} \\ 1 & 4 \end{array}\right\} \text{Possibilidades}$$

${}^5C_2\ {}^4C_3 + {}^5C_1\ {}^4C_4 = 10 \times 4 + 5 = 45$

$P = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$

Resposta: (A).

3. Número de casos possíveis: ${}^6A'_3 = 63 = 216$

Número de casos favoráveis

a A : ${}^5A'_3 = 53 = 125$

a B : ${}^6A'_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

a C : ${}^3A'_3 = 33 = 27$

$P(A) = \frac{125}{216}$; $P(B) = \frac{120}{216}$; $P(C) = \frac{108}{216}$;

$P\ (A) > 4\ P\ (C)$

Resposta: (D).

4. $\underline{9}\ \ \underline{6}\ \ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \ \underline{7}\ \ \underline{7}$

$\underline{3}\ \ \underline{8}\ \ \underline{8}\ \ \_\ \_$

$5 \times {}^4C_2 \times 7^2$

→ Dois algarismos escolhidos ordenadamente entre 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9.

→ Possibilidades de escolha da posição dos ____.

→ Possibilidades de escolha da posição dos três.

$P = \frac{1}{5 \times {}^4C_2 \times 7^2}$

Resposta: (B).

5. Número de casos favoráveis: ${}^{14}C_4$

Número de casos possíveis: ${}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1$

$\frac{{}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1}{{}^{14}C_4}$

Resposta: (A).

Pág. 41

1. Número de casos favoráveis: ${}^{31}C_4 = 31\ 465$

Número de casos possíveis

Para além do Ramos, a comissão terá de ser formada por mais 3 alunos, escolhidos em 30, sendo pelo menos uma rapariga:

${}^{18}C_3 + {}^{18}C_2\ {}^{12}C_1 + {}^{18}C_1\ {}^{12}C_2 = 3840$

$P = \frac{3840}{31465} \approx 0{,}122$

2.1 $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$P(A) = \frac{4}{9}$

2.2 $B = \{2, 3, 5, 7\}$

$P(B) = \frac{4}{9}$

2.3 $C = S$; $P\ (C) = 1$.

2.4 $A \cap B = \{2\}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

2.5 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$P(A \cup B) = \frac{7}{9}$

3.1 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3.2 $P = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$

3.3 $P = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$

3.4 $P = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$

4. Número de casos possíveis: $P_8 = 8!$

Número de casos favoráveis: $P_3 \times P_5 \times 2 = 3! \times 5! \times 2$

$P = \frac{3! \times 5! \times 2}{8!} = \frac{2}{28}$

5. Número de casos possíveis: $P_8 = 8!$

Número de casos favoráveis: $P_4 \times P_4 \times 2 = 4! \times 4! \times 2$

$P = \frac{4! \times 4! \times 2}{8!} = \frac{1}{35}$

6.1 Com dois algarismos 9:

${}^4C_2 \times {}^9A'_2 = 486$

→ Outros 2 algarismos

→ Número de possíveis posições dos algarismos 9.

Com três algarismos 9: ${}^4C_3 \times 9 = 36$

Com quatro algarismos 9: 1

$486 + 36 + 1 = 523$

6.2 $\overline{2}\ \ \overline{10}\ \ \overline{10}\ \ \overline{10}$

→ O 1.º algarismo pode ser 3 ou 4.

$2 \times 103 - 1 = 1999$

→ O código 3000

6.3 $P = \frac{{}^{10}A_4}{{}^{10}A'_4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = \frac{63}{125} = 0{,}504$