1.1 $f(x) = -3\sin(4\pi x)$ **Pág. 209**

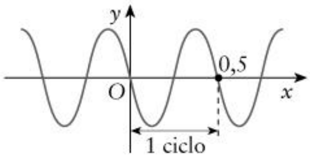
2π é o período de $y = \sin x$

4π é o coeficiente de x

Período de $f = \frac{2\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} = \frac{1}{2}$

Período de $f = \frac{1}{2}$

Verificação:



Período é $0{,}5 - 0 = 0{,}5$

$g(x) = -5\cos(3x)$

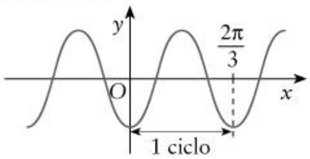
2π é o período de $y = \cos x$

3 é o coeficiente de x

Período de $g = \frac{2\pi}{3}$

1.2 Período de $g = \frac{2\pi}{3}$

Verificação:



O período é $\frac{2\pi}{3} - 0 = \frac{2\pi}{3}$.

1.3 $f(t) = 5\cos(6\pi t)$

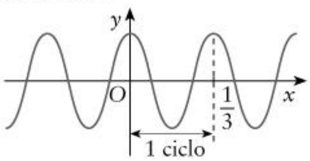
2π é o período de $y = \cos t$

6π é coeficiente de t

Período de $f = \frac{2\cancel{\pi}}{6\cancel{\pi}} = \frac{1}{3}$

Período de $f = \frac{1}{3}$

Verificação:



O período é $\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

1.4 $h(x) = 1 - \tan(1 - 6x)$

$\Leftrightarrow h(x) = 1 + \tan(-1 + 6x)$

π é o período de $y = \tan x$

6 é o coeficiente de x

Período de $h = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Período de $h = \frac{\pi}{6}$

1.5 $f(t) = 1 - \sin(3 - \pi t)$

$\Leftrightarrow f(t) = 1 + \sin(-3 + \pi t)$

2π é o período de $y = \sin t$

π é o coeficiente de t

Período de $f = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Período de $f = 2$

1.6 $f(t) = 1{,}3 + 2{,}5\cos\frac{\pi(t+2)}{5}$

$\Leftrightarrow f(t) = 1{,}3 + 2{,}5\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{2\pi}{5}\right)$

2π é o período de $y = \cos t$

$\frac{\pi}{5}$ é o coeficiente de t

Período de $f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$

Período de $f = 10$

1.7 $f(t) = \tan(2t)$

π é o período de $y = \tan t$

2 é o coeficiente de t

Período de $f = \frac{\pi}{2}$

Período de $f = \frac{\pi}{2}$

1.8 $f(t) = 1 - \tan(1 - 3\pi t)$

$\Leftrightarrow f(t) = 1 + \tan(-1 + 3\pi t)$

π é o período de $y = \tan t$

3π é o coeficiente de t

Período de $f = \frac{\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}} = \frac{1}{3}$

Período de $f = \frac{1}{3}$

---

2. Observando o gráfico para $x = 0$, a função não é nula. **Pág. 213**

Portanto, é mais simples considerar:

$y = a\cos(bx - c) + d$

- $|a| = \frac{5-(-5)}{2} = 5$; $a = \pm 5$
- $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- $d = 0$
- Determinação de c

Fazendo $a = -5$, como para $x = 0$ se tem $y = -5$, vem:

$-5 = -5\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 0 - c\right)$

$1 = \cos(-c)$

$-c = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$c = 0$ (p. e.), então um modelo que possa representar o gráfico é: $y = -5\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

---

3. Observando o gráfico para $x = 0$, a função não se anula. **Pág. 214**

Portanto, é mais simples considerar:

$y = a\cos(bx - c) + d$

- $|a| = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$: $a = \pm\frac{3}{2}$
- $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$
- $d = 4{,}5$

Determinação de c

Fazendo $a = \frac{3}{2}$, dado que para $x = 0$ se tem $y = 3$, vem:

$3 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\times 0 - c\right) + 4{,}5$

$\Leftrightarrow \cos(-c) = -1$

$\Leftrightarrow -c = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Por exemplo, $c = -\pi$.

Então, vem: $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}x + \pi\right) + 4{,}5$.

---

1. (A) **Pág. 216**

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}:$
$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ \tan(2x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{4}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

R.: **(D)** .

3. $f:\ x \mapsto y = \sin^2 x\ ;\ g:\ x \mapsto y = \sin x^2$ e
$h:\ x \mapsto y = e^{\sin x}$

A função h é periódica de período 2π.

R.: **(B)** .

4. $f:\ x \mapsto y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$
$g:\ x \mapsto y = 2 + \sin(-2x + \pi)$

Assinalar a verdadeira.

(A) O contradomínio da função f é $[-2\ ,\ 2]$.
→ Falsa

O contradomínio da função f é $[-1\ ,\ 1]$.

(B) O período da função f é 2 . → Verdadeira

(C) O período da função g é 2 . → Falsa

(D) O contradomínio da função g é $[-1\ ,\ 3]$.
→ Falsa

R.: **(B)** .

5. Sabemos que:

- A profundidade da praia-mar é de 10 m ;
- A profundidade da baixa-mar é de 7 m ;
- O tempo que decorre entre cada maré alta e cada maré baixa é de 6 horas, sendo igualmente de 6 horas o tempo que decorre entre cada maré baixa e cada maré alta.

Determinação de a :

$|A| = \frac{10-7}{2} = 1{,}5$ → Exclui a opção (A)

Determinação de D :

$D = \frac{10+7}{2} = 8{,}5$

Determinação de B :

O período da função é 12 , logo, $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Como o tempo, t em horas, foi para $t = 0$, imediatamente após a maré alta, ou seja, para $t = 0$, a função toma o valor 10 .

Donde um modelo que mais simplesmente defina a situação apresentada é: $y = A\cos[B(x - C)] + D$.
→ Exclui a opção (B)

Sabemos, também, que para $t = 6$, a profundidade é 7 , donde:

$7 = 1{,}5\cos\left[\frac{\pi}{6}(6 - c)\right] + 8{,}5$

$\Leftrightarrow \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}c\right) = -1$

$\Leftrightarrow \pi - \frac{\pi}{6}c = \pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow c = -12k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ → Exclui a opção (C)

Logo, a opção correcta é a **(D)** .

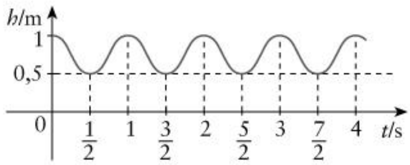
$y = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8{,}5$.

6.1

t (s)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
h (m)	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1

Pág. 217

6.2



6.3 Pretende-se mostrar que $h(t) = \frac{1}{4}\cos(2\pi t) + \frac{3}{4}$.

Estamos à procura de uma função-tipo.

Determinação de a :

Como o contradomínio da função é $D' = \left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$.

Então:

$|a| = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\ ;\ a = \pm\frac{1}{4}$.

Neste caso, $a = \frac{1}{4}$.

Determinação de b :

Por observação do gráfico da função podemos afirmar que o período da função é 1 , portanto $b = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Determinação de d :

A recta horizontal que "corta" o gráfico a meio é $y = \frac{3}{4}$, donde $d = \frac{3}{4}$.

Determinação de c :

O ponto de coordenadas $(1\ ,\ 1)$ é um ponto do gráfico da função, assim:

$1 = \frac{1}{4}\cos(2\pi(1 - c)) + \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(2\pi - 2\pi c) = 1$

$\Leftrightarrow 2\pi - 2\pi c = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow c = 1 - k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Logo, por exemplo, $k = 1$ vem $c = 0$.

Daí que $h(t) = \frac{1}{4}\cos(2\pi t) + \frac{3}{4}$.

7. A população de aves tropicais varia anualmente atingindo o máximo de $10\,000$ em 1 de Janeiro e um mínimo de 4000 em 1 de Julho. Como o modelo matemático que descreve a situação é um gráfico com a forma sinusoidal, então será uma função-tipo: $y = a\sin[b(t - c)] + d$.

Determinação de a :

$|a| = \frac{10\,000 - 4000}{2} = 3000\ ;\ a = \pm 3000\ ;$

como em 1 de Janeiro a população de aves é de $10\,000$, então $a = 3000$.

Determinação de b :

O período da função é 12 (ciclo de um ano), portanto, $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Determinação de d :

$d = \frac{10\,000 + 4000}{2} = 7000$

Determinação de c :

Sabe-se que o ponto de coordenadas $(0\ ,\ 10\,000)$ pertence ao gráfico da função, assim:

$10\,000 = 3000 \sin\left[\frac{\pi}{6}(0-c)\right] + 7000$

$\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}c\right) = 1$

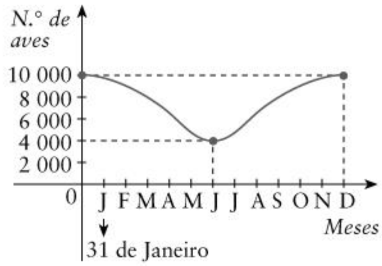
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow c = -3 - 12k\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, por exemplo, vem: $c = 9$. Então:

$y = 3000 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-9)\right) + 7000$.

Graficamente:



O dia 1 de Setembro corresponde a $t = 8$, assim:

$y = 3000 \sin\left(\frac{\pi}{6}(8-9)\right) + 7000$

$\Leftrightarrow y = 3000 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 7000$

$\Leftrightarrow y = 3000 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 7000$

$\Leftrightarrow y = -1500 + 7000$

$\Leftrightarrow y = 5500$

No dia 1 de Setembro prevê-se que existam cerca de 5500 aves tropicais.

8. $f(x) = a \sin(bx - c) + d$

$D'_f = [-2{,}5\,;\ 1{,}5]$

$|a| = \frac{1{,}5 + 2{,}5}{2} = 2$

$d = \frac{-2{,}5 + 1{,}5}{2} = -0{,}5$

Para $a = 2$

$f(x) = 2 \sin(bx - c) - 0{,}5$

$f(0) = -0{,}5$

$\Leftrightarrow -0{,}5 = 2 \sin(b \times 0 - c) - 0{,}5$

$\Leftrightarrow \sin c = 0 \Leftrightarrow \underset{\text{p. ex.}}{c = \pi}$

$\Leftrightarrow f(3) = -2{,}5$

$\Leftrightarrow -2{,}5 = 2 \sin(3b - \pi) - 0{,}5$

$\Leftrightarrow -1 = \sin(3b - \pi)$

$\Leftrightarrow 3b - \pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3b = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$

R.: $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) - 0{,}5$

O máximo é 1,5 e o mínimo é $-2{,}5$.

9.1 Pretende-se explicar porque é que $b = \frac{2\pi}{365}$.

Ora, $365 = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{365}$.

9.2 $|a| = \frac{35-3}{2} = 16 \qquad d = \frac{35+3}{2} = \frac{38}{2} = 19$

$b = \frac{2\pi}{365}$

$y = 16 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-c)\right) + 19$

Para $t = 30$ tem-se $y = 3$

$3 = 16 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(30-c)\right) + 19$

$-16 = 16 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(30-c)\right)$

$-1 = \sin\left(\frac{2\pi}{365}(30-c)\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{365}(30-c)$

$\Leftrightarrow \frac{60-2c}{365} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 120 - 4c = -365$

$\Leftrightarrow -4c = -485$

$\Leftrightarrow c \approx 121$

R.: $y = 16 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-121)\right] + 19$

9.3 Na cidade A, as temperaturas médias mínimas atingidas são -18 °C ao fim de 15/16 dias, a contar de 1 de Janeiro, ou seja, no dia 15/16 de Janeiro. As temperaturas médias máximas, nessa mesma cidade, são de 26 °C e atingem-se ao fim de, aproximadamente, 202 dias, ou seja, no dia 19 de Junho.

Na cidade B, as temperaturas médias tomam valores bem diferentes. Nesta cidade, as temperaturas médias máximas são de 4 °C e são atingidas ao fim de 19 dias, ou seja, no dia 19 de Janeiro, enquanto que as temperaturas médias mínimas são de -4 °C passados 202 dias, ou seja, a 19 de Julho.

Podemos então afirmar que quando a cidade A tem temperaturas superiores, na cidade B as temperaturas são mínimas.

No entanto, existem duas alturas do ano em que as duas cidades registam as mesmas temperaturas, aproximadamente, de 0,6 °C, ao fim de 101 dias, isto é, a 11 de Abril, e também ao fim de 303 dias, isto é, a 30 de Outubro.