1.1 $\log_2(64)=\log_2(2^6)$, **Pág. 101**

donde $\log_2(2^6)=y \Leftrightarrow 2^y=2^6 \Leftrightarrow y=6$;

1.2 $\log_{16}(16)=y \Leftrightarrow 16^y=16 \Leftrightarrow y=1$;

1.3 $\log_5(5)=y \Leftrightarrow 5^y=5 \Leftrightarrow y=1$;

1.4 $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)=y \Leftrightarrow 3^y=\frac{1}{81}$

$\Leftrightarrow 3^y=3^{-4} \Leftrightarrow y=-4$;

1.5 $\log_2\left(\frac{1}{64}\right)=y \Leftrightarrow 2^y=\frac{1}{64}$

$\Leftrightarrow 2^y=2^{-6} \Leftrightarrow y=-6$;

1.6 $\log_4(1)=y \Leftrightarrow 4^y=1 \Leftrightarrow 4^y=4^0 \Leftrightarrow y=0$;

1.7 $\log_{\frac{1}{4}}(2)=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y=2 \Leftrightarrow 2^{-2y}=2$

$\Leftrightarrow -2y=1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$;

1.8 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right)=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^y=\frac{1}{125}$

$\Leftrightarrow 5^{-y}=5^{-3} \Leftrightarrow y=3$;

1.9 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y=\frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow 2^{-y}=2^{-4} \Leftrightarrow y=4$;

1.10 $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)+\log_{\frac{1}{32}}(2)=-5-\frac{1}{5}=-\frac{26}{5}$.

Cálculo auxiliar

Seja $a=\log_2\left(\frac{1}{32}\right) \Leftrightarrow 2^a=\frac{1}{32}$

$\Leftrightarrow 2^a=2^{-5} \Leftrightarrow a=-5$

e

$b=\log_{\frac{1}{32}}(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^b=2$

$\Leftrightarrow 2^{-5b}=2 \Leftrightarrow -5b=1$

$\Leftrightarrow b=-\frac{1}{5}$

2.1 $\log 1000=\log 10^3=3$; **Pág. 102**

2.2 $\log 0{,}01=\log 10^{-2}=-2$;

2.3 $\ln e^3=3$;

2.4 $\ln e^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$;

2.5 $\ln \sqrt[5]{e}=\ln e^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$;

2.6 $\log(0{,}1)=\log 10^{-1}=-1$;

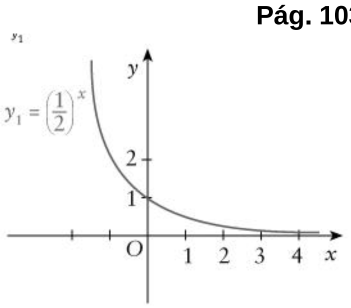
2.7 $\ln(e)=1$;

2.8 $\log 10=1$;

2.9 $\ln e^2+\ln e^{-10}+\log 1=2-10+0=-8$.

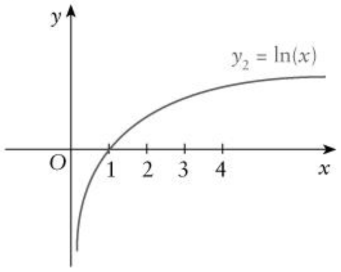
3.1 $y_1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **Pág. 103**

$D_{y_1}=\mathbb{R}$



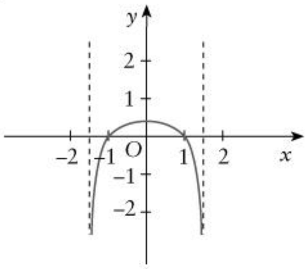
3.2 $y_2=\ln(x)$

$D_{y_2}=\mathbb{R}^+$



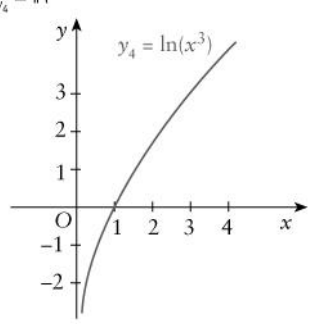
3.3 $y_3=\log(2-x^2)$

$D_{y_3}=]-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}[$



3.4 $y_4=\ln(x^3)$

$D_{y_4}=\mathbb{R}^+$



4.1 a) $\log_2(64\times 16)$ **Pág. 106**

$=\log_2(64)+\log_2(16)$

$=\log_2(2^6)+\log_2(2^4)$

$=6+4$

$=10$;

b) $\log_3(81\times 27)=\log_3(81)+\log_3(27)$

$=\log_3(3^4)+\log_3(3^3)$

$=4+3$

$=7$;

c) $\log_2(64:16)=\log_2(64)-\log_2(16)$

$=\log_2(2^6)+\log_2(2^4)$

$=6-4$

$=2$;

d) $\log_3(81:27)=\log_3(81)-\log_3(27)$

$=\log_3(3^4)+\log_3(3^3)$

$=4-3$

$=1$;

e) $\log_2(32)^8=8\times\log_2(32)$

$=8\times\log_2(2^5)$

$=8\times 5$

$=40$;

f) $\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{81^8}\right) = \log_3(\sqrt[4]{27}) - \log_3(81)^8$

$= \log_3(\sqrt[4]{3^3}) - 8 \times \log_3(3^4)$

$= \log_3\left(3^{\frac{3}{4}}\right) - 8 \times \log_3 3^4$

$= \frac{3}{4} - 8 \times 4$

$= \frac{3}{4} - 32$

$= -\frac{125}{4}$.

4.2 a) Queremos mostrar que: $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

Seja $\log_a(b) = x$ e $\log_b(a) = y$.

Logo, $a^x = b$ e $b^y = a$, substituindo b, na segunda igualdade, vem $(a^x)^y = a$, logo, $a^{xy} = a$, daí que $xy = 1$, donde $x = \frac{1}{y}$, isto é, $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

c. q. m.

b) Queremos mostrar que:

$\log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \frac{1}{2}\log_{(a)} - \frac{3}{10}\log(b)$

1.º membro $= \log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}}\right)$

$= \log\left(\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \log\left(\frac{a}{b^{\frac{3}{5}}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\log(a) - \log\left(b^{\frac{3}{5}}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{1}{2}\log b^{\frac{3}{5}}$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \log(b)$

$= \frac{1}{2}\log(a) - \frac{3}{10}\log(b) =$ 2.º membro

c.q.m.

4.3 a) $\ln(x^2) + \ln(x) - \ln(\sqrt{x})$

$= \ln(x^3) - \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \ln\left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= \ln\left(x^{\frac{5}{2}}\right)$

$= \frac{5}{2}\ln(x)$;

b) $2\ln(a^2) - 3\ln(b)$

$= \ln(a^4) - \ln(b^3)$

$= \ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$.

Pág. 107

5.1 $\log_3(x) = 5$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log_3(x) = 5 \Leftrightarrow \log_3(x) = \log_3(3^5)$

$\Leftrightarrow x = 3^5 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = 243 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = 243$

$S = \{243\}$;

5.2 $\log_x(3) = 2$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : x \neq 1\} = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\log_x(3) = 2 \Leftrightarrow \log_x(3) = \log_x(x^2)$

$\Leftrightarrow 3 = x^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$S = \{\sqrt{3}\}$;

5.3 $2^x = 80 \Leftrightarrow x = \log_2(80)$

$S = \{\log_2 80\}$;

5.4 $\log(3x^2) = \log(x^3)$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 > 0 \wedge x^3 > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log(3x^2) = \log(x^3) \Leftrightarrow 3x^2 = x^3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2(3 - x) = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee 3 - x = 0) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 3) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$;

5.5 $3^{2x-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$;

5.6 $x = \log_{36} 6 \Leftrightarrow x = \log_{36}\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow x = \log_{36} 36^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

5.7 $\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 8$

O domínio é

$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} =]-1, +\infty[$

$\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 8 \Leftrightarrow x + 1 = (\sqrt{2})^8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2^4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 15 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 15$

$S = \{15\}$;

5.8 $\log_x(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}$

O domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : x \neq 1\} = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\log_x(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} = x^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

$S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$;

5.9 $x\log(1{,}25) + 3x\log(20) = 1$

$\Leftrightarrow x(\log(1{,}25) + 3\log(20)) = 1$

$\Leftrightarrow x(\log(1{,}25) + \log(20)^3) = 1$

$\Leftrightarrow x(\log(1{,}25) + \log(8000)) = 1$

$\Leftrightarrow x\log(1{,}25 \times 8000) = 1$

$\Leftrightarrow x\log(10\,000) = 1$

$\Leftrightarrow x\log 10^4 = 1$

$\Leftrightarrow x \times 4 = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

6.1 a) $3-\ln e^{3x}=0$ **Pág. 108**

O domínio é $D=\{x\in\mathbb{R}: e^{3x}>0\}=\mathbb{R}$

$3-\ln e^{3x}=0 \iff 3-3x=0$

$\iff 3x=3$

$\iff x=1$

$S=\{1\}$;

b) $\frac{1}{e^x}-3e^x+2=0$

$\iff 1-3e^x\times e^x+2e^x=0 \ \wedge\ e^x\neq 0$

$\iff -3\,(e^x)^2+2e^x+1=0$

Seja $e^x=t$

$\iff -3t^2+2t+1=0$

$\iff t=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-6}$

$\iff t=\frac{-2\pm 4}{-6}$

$\iff t=1 \ \vee\ t=-\frac{1}{3}$

Substituindo de novo a variável, vem:

$e^x=1 \ \vee\ e^x=-\frac{1}{3}$

$\iff e^x=e^0 \ \vee$ equação impossível, uma vez que $e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\iff x=0$

$S=\{0\}$;

c) $e^{2x}-3e^x+2=0 \iff e^x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

$\iff e^x=\frac{3\pm 1}{2}$

$\iff e^x=2 \ \vee\ e^x=1$

$\iff x=\ln 2 \ \vee\ x=0$

$S=\{0,\ \ln 2\}$.

6.2 a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=\mathbb{R}^+$;

b) $e^{3+2\ln x}-(x-3)\,e^3=0$

$\iff e^3\times e^{2\ln x}-(x-3)\,e^3=0$

$\iff e^3\times[e^{\ln x^2}-(x-3)]=0$

$\iff e^3\times[x^2-x+3]=0$

$\iff x^2-x+3=0$

$\iff x=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$, impossível em $\mathbb{R}$.

$S=\varnothing$.

7.1 $\ln(x-2)+\ln(x+1)\geq \ln(x+2)-\ln 3$ **Pág. 110**

Determinação do domínio:

$D=\{x\in\mathbb{R}: x-2>0\wedge x+1>0\wedge x+2>0\}$

$D=\{x\in\mathbb{R}: x>2\wedge x>-1\wedge x>-2\}$

$D=\{x\in\mathbb{R}: x>2\}$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\ln(x-2)+\ln(x+1)\geq \ln(x+2)-\ln 3$

$\iff \ln[(x-2)(x+1)]\geq \ln\left(\frac{x+2}{3}\right)$

$\iff (x-2)(x+1)\geq \frac{x+2}{3}$

$\iff x^2-x-2\geq \frac{x+2}{3}$

$\iff 3x^2-3x-6\geq x+2$

$\iff 3x^2-4x-8\geq 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, vem:

$x=\frac{4\pm\sqrt{16+96}}{6} \iff x=\frac{4\pm\sqrt{112}}{6} \iff$

$\iff x=\frac{4\pm 4\sqrt{7}}{6} \iff x=\frac{2+2\sqrt{7}}{3} \vee x=\frac{2-2\sqrt{7}}{3}$

Como $D=\{x\in\mathbb{R}: x>2\}$, então

$S=\left[\frac{2+2\sqrt{7}}{3},+\infty\right[$

7.2 $\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)<0\right]$

Determinação do domínio:

$D=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+2x+1>0\wedge \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)>0\right\}$

$x^2+2x+1>0$

$\iff (x+1)^2>0$

$\iff x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)>0$

$\iff 0<x^2+2x+1<1$

$\iff 0<(x+1)^2<1$

$D=\left]-1,0\right[$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)\right]<0$

$\log\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)\right]<\log(1)$

$\iff \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)<1$

$\iff \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

$\iff x^2+2x+1>\frac{1}{3}$

$\iff 3x^2+6x+3>1$

$\iff 3x^2+6x+2>0$

Recorrendo à fórmula resolvente, vem:

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{6} \iff x=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{6} \iff$

$\iff x=\frac{-6+2\sqrt{3}}{6} \vee x=\frac{-6-2\sqrt{3}}{6} \iff$

$\iff x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3} \vee x=\frac{-3-\sqrt{3}}{3} \iff$

Como $D=\left]-1,0\right[$, então

$S=\left]\frac{-3+\sqrt{3}}{3},0\right[$

Nota: Por lapso, a solução que consta do manual não está correcta.

8.1 a) Se $M=3$, então $\log_{10}A=0 \iff A=10^0 \iff$ **Pág. 111**

$\iff A=1$

É a magnitude de um tremor de terra com uma amplitude igual a 1.

b) $M_1 = \log_{10}(A_1) + 3 \Leftrightarrow M_1 - 3 = \log_{10}(A_1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_1 = 10^{M_1 - 3}$

$M = \log_{10}(100\,A_1) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(100 \times 10^{M_1-3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^2 \times 10^{M_1-3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^{2+M_1-3}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = \log_{10}\left(10^{M_1-1}\right) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = (M_1 - 1) + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M = M_1 + 2$

Nota: Por lapso, a solução que consta do manual não está correcta.

8.2 a) $pH = -\log\left(1{,}00 \times 10^{-7}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = -\left[\log(1{,}00) + \log\left(10^{-7}\right)\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = -\left[0 - 7\log(10)\right] \Leftrightarrow pH = -[-7 \times 1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pH = 7$

b) As soluções ácidas têm pH menor que 7 e as soluções alcalinas têm pH maior que 7.

9.1 **Pág. 112**

$A(0) = 10\,e^{0,2\times 0} = 10$
$\pi R^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \Leftrightarrow R \approx 1{,}78$

Quando se iniciou a observação o raio da mancha era de $1{,}78$ km (2 c. d.).

9.2 $\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{10\,e^{0,2(t+1)}}{10\,e^{0,2t}}$
$= \frac{e^{0,2t+0,2}}{e^{0,2t}} = e^{0,2t+0,2-0,2t} = e^{0,2} \approx 1{,}22$

Este resultado permite concluir que em cada hora que passa a área do crude espalhado sobre o mar é multiplicada por $e^{0,2} \approx 1{,}22$, ou seja, a área do crude aumenta 22% por hora.

9.3 $A = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$
$10e^{0,2t} = 4\pi$
$\Leftrightarrow e^{0,2t} = \frac{4\pi}{10}$
$\Leftrightarrow 0{,}2t = \ln\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{0{,}2}$
$\Leftrightarrow t = 1{,}14$ (2 c. d.)

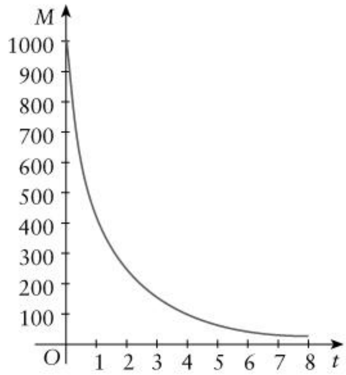
O barco ficou ancorado até que, 10 horas depois da avaria, foi reparado. Assim, o crude chegou à praia $1{,}14$ horas após a avaria, ou seja, antes deste ser reparado.

10.1 **Pág. 113**

$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-0,5t}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,5t}$
$\Leftrightarrow -0{,}5t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}5} \Leftrightarrow t = 1{,}39$ (2 c. d.)

10.2 $M = 1000\,e^{-0,5t}$

$t = 0 \Rightarrow M = 1000$
$t = 1 \Rightarrow M = 606{,}5$ (1 c. d.)
$t = 2 \Rightarrow M = 367{,}9$
$t = 3 \Rightarrow M = 223{,}1$
$t = 4 \Rightarrow M = 135{,}3$
$t = 5 \Rightarrow M = 82{,}1$
$t = 6 \Rightarrow M = 49{,}8$
$t = 7 \Rightarrow M = 30{,}2$
$t = 8 \Rightarrow M = 18{,}3$



11.1 **Pág. 114**

O número de pessoas que observaram o fenómeno é igual a $P(0)$.
Assim:
$P(0) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2\times 0}} = 10$.
Logo, o fenómeno foi observado por 10 pessoas.

11.2 $P(10) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,2\times 10}}$
$\Leftrightarrow P(10) = 45$ (às unidades)

Interpretação: Passadas 10 horas da observação do fenómeno, o número de pessoas que tinham conhecimento do boato era, aproximadamente, igual a 45.

11.3 $P(t) = 60$
$\Leftrightarrow \frac{100}{1 + 9e^{-0,2t}} = 60$
$\Leftrightarrow 100 = 60 + 540e^{-0,2t}$
$\Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{2}{27}$
$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{27}\right)}{-0{,}2}$
$\Leftrightarrow t = 13$ (às unidades)

Interpretação: Passadas 13 horas da observação do fenómeno, cerca de 60 pessoas sabiam do boato.

12.1 **Pág. 115**

$Q(0) = 10\log\left(\frac{10}{0+1}\right)$
$= 10\log(10) = 10 \times 1$
$= 10$

A quantidade de água utilizada na experiência foi 10 litros.

12.2 $Q(4) = 10\log\left(\frac{10}{4+1}\right)$
$= 10\log(2) \approx 3$

Aproximadamente 3 litros.

12.3 $G(t) = 10 - Q(t) 10 \log\left(\frac{10}{4+1}\right)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\log\left(\frac{10}{t+1}\right)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\left[\log(10) - \log(t+1)\right]$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10\left[1 - \log(t+1)\right]$

$\Leftrightarrow G(t) = 10 - 10 + 10\log(t+1)$

$\Leftrightarrow G(t) = 10\log(t+1)$ (c.q.d.)

12.4 $Q(t) = 0$

$\Leftrightarrow 10\log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log(10) - \log(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow \log(t+1) = \log(10)$

$\Leftrightarrow t+1 = 10 \Leftrightarrow t = 9$

Para obtermos o sal de cozinha têm de decorrer 9 horas.

Pág. 116

1. $f(x) - g(x) > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} - 2^{-x+1} > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} > 2^{-x+1}$

$\Leftrightarrow x + 1 > -x + 1$

$\Leftrightarrow 2x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

(B) $\mathbb{R}^+$;

2. $Q(0) = 500^{1 - 0,2 \times 0}$

$= 500$

(D) 500 mg ;

3. $\log_a(ax^2) - \log_a(x)$

$= \log_a\left(\frac{ax^2}{x}\right)$

$= \log_a(ax)$

$= \log_a(a) + \log_a(x)$

$= 1 + \log_a(x)$

(B) $1 + \log_a(x)$;

4. $\frac{M_0}{2} = M_0\, e^{-0,5t}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,5t}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(0,5)}{0,5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{0,5}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,5}$

(A) $t = \frac{\ln(2)}{0,5}$;

5. $f(x) = b^5 + \log_b 2$, $b > 1$

$\Leftrightarrow f(x) = b^5 \times b^{\log_b 2}$

$\Leftrightarrow f(x) = b^5 \times 2$

$\Leftrightarrow f(x) = 2b^5$

(A) $f(x) = 2b^5$;

6. $\log_2(x) = -5 + \log_2(x^2)$

$\Leftrightarrow \log_2(x) = -5 + 2\log_2(x)$

$\Leftrightarrow -\log_2(x) = -5$

$\Leftrightarrow x = 2^5$

$\Leftrightarrow x = 32$

7. Se $x = 32$ então $y = \log_2(32) = \log_2 2^5 = 5$

(B) (32,5) ;

$(0\ ,\ c) : c = e^{0 + 2b}$

$\Leftrightarrow c = e^0 \times e^{2b}$

$\Leftrightarrow c = e^{2b}$

$\Leftrightarrow 2b = \ln(c)$

$\Leftrightarrow b = \frac{\ln(c)}{2}$

(B) $\frac{\ln(c)}{2}$;

8. **Por exclusão:**

(A) $g(2) = e^{2-3} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0,3$ ——— exclui (A)

(B) $g(5) = e^{5-3} = e^2 \neq 7,4$ ——— exclui (B)

(C) $g(\ln 2) = e^{\ln(2) - 3} = \frac{e^{\ln(2)}}{e^3} = \frac{2}{e^3} \neq 1$ – exclui (C)

(D) $g(\ln 3) = e^{\ln(3) - 3} = \frac{e^{\ln(3)}}{e^3} = \frac{3}{e^3}$

(D) $\left(\ln 3\ ,\ \frac{3}{e^3}\right)$;

9. $\ln(5e) + \ln(e^3)$

$= \ln(5) + \ln(e) + 3\ln(e)$

$= \ln(5) + 4\ln(e)$

$= \ln(5) + 4 \times 1$

$= 4 + \ln(5)$

(D) $4 + \ln(5)$.

Pág. 117

10.1 $3000 = N_0 \times e^{0,02 \times 20}$

$\Leftrightarrow 3000 = N_0 \times e^{0,4}$

$\Leftrightarrow N_0 = \frac{3000}{e^{0,4}}$

$\Leftrightarrow N_0 \approx 2011$ (às unidades)

No início havia cerca de 2011 plantas.

10.2 $2011 \times e^{0,02(t+x)} = 2 \times 2011 \times e^{0,02t}$

$\Leftrightarrow e^{0,02t + 0,02x} = 2\, e^{0,02t}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{0,02t + 0,02x}}{e^{0,02t}} = 2$

$\Leftrightarrow e^{0,02x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{0,02}$

$\Leftrightarrow x = 34,7$ (1 c. d.)

Interpretação: Passados 34,7 dias de um determinado dia t, tem-se o dobro das plantas.

11.1 $N(5) = \frac{200}{1 + 4e^{-0,12 \times 5}} = 62,59$ (2 c. d.)

Passados cinco anos da chegada dos veados à ilha, haverá, aproximadamente, 62 veados.

11.2 $100 = \frac{200}{1 + 4e^{-0,12t}}$

$\Leftrightarrow 1 + 4e^{-0,12t} = 2$

$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0,12}$

$\Leftrightarrow t = 11{,}55 \quad (2 \text{ c. d.})$

Deverão decorrer cerca de 11,55 anos.

11.3 A condição que traduz o problema é:

$$\frac{200}{1+4e^{-0{,}12\,t}} > 200$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4e^{-0{,}12\,t} < 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}12\,t} < 0}$$

Condição impossível em $\mathbb{R}$.

Conclui-se, assim, que na ilha o número de veados nunca atingirá os 200 .

12.1 $h(t) = 0{,}5$

$$\Leftrightarrow 0{,}32 + 0{,}89 \ln(t) = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}89 \ln(t) = 0{,}18$$

$$\Leftrightarrow \ln(t) = \frac{0{,}18}{0{,}89}$$

$$\Leftrightarrow t = e^{\frac{0{,}18}{0{,}89}}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 1{,}2$$

A planta tem aproximadamente 1,2 meses.

12.2 $h(3t) - h(t) =$

$$= 0{,}32 + 0{,}89 \ln(3t) - (0{,}32 + 0{,}89 \ln(t))$$

$$= \cancel{0{,}32} + 0{,}89 \ln(3t) - \cancel{0{,}32} - 0{,}89 \ln(t)$$

$$= 0{,}89 \ln(3t) - 0{,}89 \ln(t)$$

$$= 0{,}89 [\ln(3t) - \ln(t)]$$

$$= 0{,}89 \ln\left(\frac{3t}{t}\right)$$

$$= 0{,}89 \ln(3) \approx 0{,}98 \quad (2 \text{ c. d.})$$

Podemos assim concluir que $h(3t) - h(t)$ é constante, sendo aproximadamente igual a 0,98 .

Este resultado permite concluir que se o tempo que decorre do crescimento de uma planta aumenta para o triplo em relação a outra, a diferença entre as suas alturas é, aproximadamente, 98 cm .

13.1 $62 = 37 + (70 - 37)\, e^{-k}$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{33} = e^{-k}$$

$$\Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{25}{33}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = 0{,}28 \quad (2 \text{ c. d.})$$

13.2 $40 = 37 + (70 - 37)\, e^{-0{,}28\,k}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{33} = e^{-0{,}28\,k}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{33}\right)}{-0{,}28}$$

$$\Leftrightarrow k = 8{,}56 \quad (2 \text{ c. d.})$$

Será necessário esperar 8,56 h para que o vinho atinja uma temperatura de 40 °F .