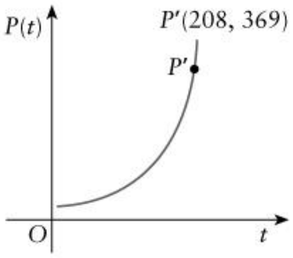
Capítulo 3

1. Equações e inequações exponenciais

1.1 **Pág. 85**



1.2 A população mundial pode ser encontrada pela função:
$P(t) = 6\,(1 + 0{,}02)^t$, com t em anos após 1992.
Assim, no ano 2200 ($2200 - 1992 = 208$) a população mundial prevista será $6 \times (1{,}02)^{208} \approx 369$ milhares de milhão.
Comentário: A população mundial prevista para 2200 é de 369 milhares de milhão, daí poder afirmar-se que a mesma crescerá muito rapidamente.

1.3 2134 ;

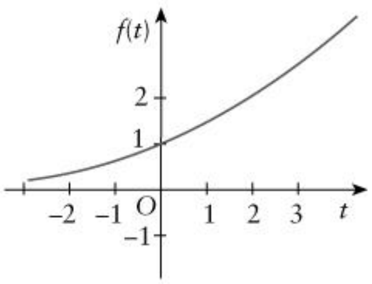
1.4 $P(t) = 6 \times (1{,}03)^t$, com t em anos após 1992 .

2.1 **Pág. 87**

t (dias)	P (milhões)
0	1
1	1,5
2	2,25
...	...
t	$1{,}5^t$

Ao fim de t dias haverá $1{,}5^t$ milhões de bactérias.

2.2 $f(t) = (1{,}5)^t$



3.1 **Pág. 88**

$$4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$
c. s. $= \{-2\}$

3.2

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x = 1000 \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^3$$
$$\Leftrightarrow -x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = -3$$
c. s. $= \{-3\}$

3.3

$$125 = 5^{2-x} \Leftrightarrow 5^3 = 5^{2-x}$$
$$\Leftrightarrow 3 = 2 - x$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$
c. s. $= \{-1\}$.

4.1 **Pág. 89**

$$3^x > \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-4} \Leftrightarrow x > -4$$
$S =]-4, +\infty[$

4.2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27 \Leftrightarrow 3^{-x} < 3^3 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3$$
$S =]3, +\infty[$

4.3

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x \leq \left(\frac{7}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x \leq 0$$
$S =]-\infty, 0]$

4.4

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^{x-3} \Leftrightarrow 2^{-x} < 2^{x-3} \Leftrightarrow -x < x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$
$$S = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

5.1 **Pág. 90**

. O gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ obtém-se deslocando duas unidades o gráfico de $y = 3^x$ na direcção do eixo Ox (sentido positivo).

5.2 . O gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ obtém-se do gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ por simetria relativamente ao eixo Ox .

5.3 . O gráfico de $y_3 = 4 - 3^{x-2}$ obtém-se deslocando-se o gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ quatro unidades na direcção do eixo Oy (sentido positivo).

5.4 . O gráfico de $y_4 = 3^{|x|}$ é simétrico relativamente ao eixo Oy e resulta do gráfico de $y = 3^x$ mantendo os pontos de abcissa não negativa.

5.5 . Sabe-se que $3^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo o gráfico de $y = 3^x$ é igual ao gráfico de $y = |3^x|$. Daí que o gráfico de $y_5 = -|3^x|$ seja simétrico do gráfico de $y = 3^x$ relativamente ao eixo Ox .

6.1 . $f(x) = 3^x$; **Pág. 91**

6.2 . $f(x) = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $f(x) = 2^{6-x}$.

7. **Pág. 92**

Recolha de dados:
4 anos e 3 meses correspondem a 4,25 anos;
Taxa anual nominal de 3% = 0,03.
Então, o capital acumulado será
$20\,000\ e^{0{,}03 \times 4{,}25} = 22\,720$ meticais

8. Pretende-se determinar $A(12) = 10\,e^{-0{,}3\times 12} = 0{,}273$ g (3 c. d.) **Pág. 93**

9.1 Sabemos que $P(t) = 510\,(1{,}8)^t$, daí que:

$P(t) = 510\,(1{,}8)^t =$

$= 510\,(e^{\ln 1{,}8})^t$

$= 510\,e^{(\ln 1{,}8)t}$

$= 510\,e^{0{,}588t}$

Logo, podemos escrever: $P(t) = 510\,e^{\ln(1{,}8)t}$, ou seja, $P(t) = 510\,e^{0{,}588t}$.

9.2 $P(0) = 1113$, então $k = 1113$

e $P(1) = 1113 \times e^b$

$\Leftrightarrow 2153 = 1113 \times e^b$

$\Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2153}{1113}\right) \approx 0{,}66$

Logo, podemos escrever: $P(t) = 1113\,e^{0{,}66\,t}$.

10.1 $A(10) = 20 \times e^{-0{,}2(10)}$ **Pág. 94**

$= 20 \times e^{-2} = \frac{20}{e^2} = 2{,}71$ (2 c. d.)

Inicialmente havia 20 g, 10 segundos após a observação inicial já só haviam 2,71 g de composto.

10.2 $10 = 20 \times e^{-0{,}2\,t}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}2\,t} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -0{,}2\,t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}2}$

$\Leftrightarrow t = 3{,}47$ (2 c. d.)

Para que a quantidade de composto se reduza a metade terão de decorrer 3,47 segundos.

11.1 $P(3) = 100e^{-0{,}12\times 3}$ **Pág. 95**

$\Leftrightarrow P(3) = 100e^{-0{,}36} \Leftrightarrow P(3) = 69{,}77$ (2 c. d.)

Três anos depois da compra, o automóvel vale aproximadamente 69,77 milhares de meticais.

11.2 $P(t+x) = \frac{1}{2}P(t)$

$\Leftrightarrow 100e^{-0{,}12\,(t+x)} = \frac{1}{2} \times 100e^{-0{,}12t}$

$\Leftrightarrow 100e^{-0{,}12t-0{,}12x} = 50e^{-0{,}12t}$

$\Leftrightarrow 2e^{-0{,}12t-0{,}12x} = e^{-0{,}12t}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{-0{,}12t-0{,}12x}}{e^{-0{,}12t}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}12x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0{,}12x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}12} \Leftrightarrow x \approx 5{,}77$

Interpretação: A um aumento de 5,77 anos corresponde uma redução do valor do automóvel para metade.

11.3 $100e^{-0{,}12t} = 35 \Leftrightarrow e^{-0{,}12t} = \frac{35}{100}$

$\Leftrightarrow -0{,}12t = \ln\left(\frac{35}{100}\right)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}35)}{-0{,}12}$

$t = 8{,}75$ (2 c. d.)

Quando o automóvel foi vendido tinha, aproximadamente, 8,75 anos.

12. $f(t) = ab^t$

$f(t) = a(1{,}05)^t$

$f(10) = 4000 \Leftrightarrow a(1{,}05)^{10} = 4000$

$\Leftrightarrow a = 2455{,}65$

Logo, $f(t) = 2455{,}65(1{,}05)^t$

$f(7) = 2455{,}65(1{,}05)^7 = 3455{,}35$

Há três anos, o jardineiro ganhava aproximadamente 3455,35 meticais

---

1. A afirmação verdadeira é a (C). **Pág. 96**

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

(A) é falsa, porque $f(x) = x^{-3}$ é uma expressão algébrica e não exponencial.

(B) é falsa, porque $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \neq -\frac{1}{27}$

(D) é falsa, porque $2^0 = 1 \neq 0$

2. A afirmação verdadeira é a (D).

$5^{-x+1} = 5^{-3x+6}$

$\Leftrightarrow -x+1 = -3x+6$

$\Leftrightarrow -x+3x = 6-1$

$\Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

3. A afirmação verdadeira é a (A).

Para todo o valor de $x \in \mathbb{R}$, 6^x é sempre maior do que zero, pelo que $6^x = -1$ é uma equação impossível.

4. A afirmação verdadeira é a (B).

$0{,}01 \leq 10^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{100} \leq 10^x \Leftrightarrow \frac{1}{10^2} \leq 10^x$

$\Leftrightarrow 10^{-2} \leq 10^x \Leftrightarrow -2 \leq x \Leftrightarrow x \geq -2$

$S = [-2, +\infty[$

5. A afirmação verdadeira é a (A).

$x e^{x} \geq e^{x-1}$

$\Leftrightarrow x e^{x} \geq e^{x} \cdot e^{-1}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$

$S = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$

6. A afirmação verdadeira é a (B).

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{10^{x}} \geq 0\right\}$

Uma vez que para todo o valor de $x \in \mathbb{R}$, 10^{x} é sempre maior do que zero, então $\frac{1}{10^{x}} \geq 0$.

Logo, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1}{10^{x}}}$ é $\mathbb{R}$.

7. A afirmação verdadeira é a (A).

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - e^{x} \geq 0\right\}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{2x} \geq e^{x}\right\}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x \geq x\right\}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x - x \geq 0\right\}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\right\}$

Logo, o domínio da função $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^{x}}$ é $[0, +\infty[$.

8. A afirmação verdadeira é a (B).

$N(0) = \frac{2800}{1 + 6(0{,}88)^{0}} = \frac{2800}{1 + 6 \times 1} = \frac{2800}{7} = 400$

9. A afirmação verdadeira é a (B).

$e^{x} > 0 \Leftrightarrow e^{x} + 1 > 1 \Leftrightarrow -\left(e^{x} + 1\right) \leq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -e^{x} - 1 \leq -1$

Logo, o contradomínio da função é $]-\infty, -1]$.

10.1 256 pessoas. **Pág. 97**
(Ver tabela seguinte)

10.2

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Número de novos doentes	Total de doentes afectados
1	3	4
2	12	16
3	48	64
4	192	256
5	768	1024

10.3 A partir da tabela seguinte, podemos facilmen-
mente encontrar a expressão:

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Total de doentes afectados
1	$4 = 4^{1}$
2	$16 = 4^{2}$
3	$64 = 4^{3}$
4	$256 = 4^{4}$
5	$1024 = 4^{5}$
…	…
t	4^{t}

A expressão pretendida é a seguinte:

$N(t) = 4^{t}$

10.4 $N(12) = 4^{12} = 16\,777\,216$ pessoas

10.5 $N(9) = 4^{9} = 262\,144$

$N(10) = 4^{10} = 1\,048\,576$

Assim, 9 dias não é suficiente, pelo que a resposta deve ser 10 dias.

11.1 $C(0) = 1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{0} = 1\,300\,000$

O valor inicial do andar é de 1 300 000 meticais.

11.2 $\frac{c(x+1) - c(x)}{c(x)}$

$= \frac{1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{x+1} - 1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{x}}{1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{x}}$

$= \frac{1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{x}\left(\frac{8}{7} - 1\right)}{1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{x}}$

$= \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$

Assim, a percentagem de valorização do andar é de aproximadamente 14,3%.

11.3 $C(10) = 1\,300\,000\left(\frac{8}{7}\right)^{10} = 4\,941\,546$ (às unidades).

12.1 $f(4) = 30 \times \left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right) = 22$

Uma pessoa pode memorizar 22 símbolos, em 4 minutos.

12.2 $26 = 30 \times \left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right)$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{3}} = \frac{26}{30} \Leftrightarrow -e^{-\frac{t}{3}} = -\frac{4}{30}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{3}} = \frac{4}{30} \Leftrightarrow -\frac{t}{3} = \ln\left(\frac{4}{30}\right)$

$\Leftrightarrow t = -3 \times \ln\left(\frac{4}{30}\right) \Leftrightarrow t = 6$

Para realizar uma terefa precisou, aproximadamente, de 6 minutos.