1. São condições as expressões de: **Pág. 29**

(1.2) $\frac{2}{n}+3>0$

(1.4) $2>n$

(1.5) $1-\sqrt{3}>x$

(1.6) $\sqrt{3}>\sqrt{x}$

(1.7) $1-\sqrt{x-1}>0$

As restantes são expressões designatórias.

2.1 $\forall x \in H,\ x$ é mortal. **Pág. 30**

2.2 $\forall x \in P,\ x$ tem guelras.

2.3 $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$.

3.1 Todo o quadrado de um número real é não negativo.

3.2 Todo o número natural aumentado de uma unidade é maior que esse número.

3.3 Todos os peixes respiram por guelras.

3.4 Todo o número real aumentado de quatro unidades é positivo.

3.5 Todo o número natural aumentado de quatro unidades é positivo.

4. A afirmação que não é verdadeira é a 3.4, $\forall x \in \mathbb{R},\ x+4>0$.

5.1 Proposição falsa.

5.2 Proposição verdadeira.

5.3 Proposição verdadeira.

5.4 Proposição verdadeira.

6.1 $x>0,\ \forall x \in A$.

6.2 $\forall x \in A,\ x<2x$.

7.1 $\exists x \in \mathbb{R},\ x>50$. **Pág. 31**

7.2 $\exists x \in \{\text{números primos}\}$, x é par.

7.3 $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2=16$.

7.4 $\exists x \in \{\text{cobras}\}$, x é venenosa.

8.1 Existe pelo menos um número real que é solução da equação $x^2+3x+2=0$. **Pág. 32**

8.2 Existe pelo menos um número natural que é solução da equação $x^2+3x+2=0$.

8.3 Existe pelo menos um número real cujo quadrado aumentado de três unidades é positivo.

8.4 Existe pelo menos um número real que é solução da inequação $3x-2<x$.

8.5 Existe pelo menos um número natural que é solução da inequação $3x-2<x$.

9. (8.1) É verdadeiro. Por exemplo para $x=-1$.

(8.2) É falso.

(8.3) É verdadeiro. Por exemplo para $x=1$.

(8.4) É verdadeiro. Por exemplo para $x=0$.

(8.5) É falso.

10.1 É verdadeira. (Para $x=2$)

10.2 É falsa. (Admite duas soluções: $x=-2$ ou $x=2$).

10.3 É verdadeira.

11.1 x e y são livres. **Pág. 33**

11.2 x é muda.

11.3 x é livre e y é muda.

11.4 x é muda.

12. A expressão de 11.1 é uma condição.

A expressão de 11.2 é uma proposição.

A expressão de 11.3 é uma condição.

A expressão de 11.4 é uma proposição.

13. Se $x=1$, vem: $2y<5$.
Se $x=2$, vem: $2y<4$.
Se $x=3$, vem: $2y<3$.
Se $x=4$, vem: $2y<2$.
Então, em $\mathbb{N}^*$, o conjunto-solução é $\{1, 2\}$.

14.1 a) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y=0$. **Pág. 34**

b) $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x+y=0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y=0$.

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y=0$.

14.2 (a) Quaisquer dois números reais têm soma nula. (Falso)

(b) Existem pelo menos dois números reais cuja soma é nula. (Verdadeiro)

(c) Para todo o número real existe pelo menos um outro número real cuja soma com o primeiro é nula. (Verdadeiro)

(d) Existe pelo menos um número real que adicionado com qualquer outro dá soma nula. (Falso)

15.1 Verdadeiro. $(y=1)$

15.2 Verdadeiro. $(x=0)$

16.1 $\exists x \in T$, x não joga futebol. **Pág. 35**

16.2 $\forall x \in T$, x não joga xadrez e/ou x não joga dominó.

16.3 $\forall x \in \mathbb{R}, 2x+1 \neq x-5$.

16.4 $x \in \mathbb{N}, |x| \geq 2 \wedge 2x-5 \leq 0$.

17. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x \neq 3y$.

18.1 $A(n) = 1+2^{1-n}$ **Pág. 37**

$A(1):\ u_1 = 1+2^{1-1}$
Ora, $u_1 = 2$ e $2 = 1+2^{1-1}$
Logo, $A(1)$ é verdadeira.

Suponhamos que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro p, ou seja:
$u_p = 1+2^{1-p}$

Vamos provar que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro $p+1$, isto é:

$$u_{p+1} = 1+2^{1-(p+1)} \Leftrightarrow u_{p+1} = 1+2^{-p}$$

Sabemos que $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2}$

Partindo daqui, pode-se escrever:

$$u_{p+1} = \frac{1+u_p}{2}$$

Mas sabe-se, por hipótese de indução, que $u_p = 1+2^{1-p}$.

Então, substituindo u_p, vem:

$$u_{p+1} = \frac{1+\left(1+2^{1-p}\right)}{2}$$
$$u_{p+1} = \frac{2+2^{1-p}}{2}$$
$$u_{p+1} = \frac{2\times\left(1+2^{-p}\right)}{2}$$
$$u_{p+1} = 1+2^{-p}$$

isto é,
$A(p+1)$

18.2 a) $A(n):\ u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$A(1):\ u_1 = \dfrac{1\times(2+1)}{2}$

Ora, $u_1 = 1$ e $1 = \dfrac{1\times(2+1)}{2}$

Logo, $A(1)$ é verdadeira.

Suponhamos que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro p, ou seja:

$$u_p = \frac{p(p+1)}{2}$$

Vamos provar que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro $p+1$, isto é:

$$u_{p+1} = \frac{(p+1)\left[(p+1)+1\right]}{2} \Leftrightarrow u_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Sabemos que:
$u_n = 1+2+3+\ldots+n$
$u_{n+1} = (1+2+3+\ldots+n)+(n+1)$
Ou seja:
$u_{n+1} = u_n + (p+1)$

Partindo daqui, pode-se escrever:
$u_{p+1} = u_p + (p+1)$

Mas sabe-se, por hipótese de indução, que $u_p = \dfrac{p(p+1)}{2}$.

Então, substituindo u_p, vem:

$$u_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$
$$u_{p+1} = \frac{p(p+1)+2(p+1)}{2}$$
$$u_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

isto é,
$A(p+1)$

b) $A(n):\ u_n = (3\times 2)^n$

$A(1):\ u_1 = (3\times 2)^1$
Ora, $u_1 = 3^1\times 2^1 = 6$ e $6 = (3\times 2)^1$
Logo, $A(1)$ é verdadeira.

Suponhamos que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro p, ou seja:
$u_p = (3\times 2)^p$
Vamos provar que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro $p+1$, isto é:
$u_{p+1} = (3\times 2)^{p+1}$

Sabemos que:
$u_n = 3^n\times 2^n$ e
$u_{n+1} = 3^{n+1}\times 2^{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = 3^n\times 3\times 2^n\times 2$
Ou seja:
$u_{n+1} = u_n\times(3\times 2)$

Partindo daqui, pode-se escrever:
$u_{p+1} = u_p\times(3\times 2)$

Mas sabe-se, por hipótese de indução, que $u_p = (3\times 2)^p$.

Então, substituindo u_p, vem:
$u_{p+1} = (3\times 2)^p\times(3\times 2)$
$u_{p+1} = (3\times 2)^{p+1}$
isto é,
$A(p+1)$

Pág. 38

1. Resposta: (D).

2. Resposta: (A).

3. Resposta: (C).

4. Resposta: (C).

5. Resposta: (B).

6. Resposta: (A).

7. Resposta: (B).

Pág. 39

8.1 $\forall x \in \mathbb{N},\ x > 0.$

8.2 $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0.$

8.3 $\forall x \in \mathbb{Q},\ |x| \geq 0.$

8.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x + 6.$

8.5 $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \in \left]-5 , 5\right[.$

8.6 $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \notin \left]4 , 5\right[.$

9.1 Todo o número natural é real. (Verdadeiro)

9.2 Em L a conjunção é indempotente. (Verdadeiro)

9.3 Há pelo menos um número real cujo valor absoluto é não superior a sete. (Verdadeiro)

9.4 Todo o número natural é maior que o seu inverso. (Falso)

9.5 Há pelo menos um número real que é maior que o seu inverso. (Verdadeiro)

9.6 Existe pelo menos um número do intervalo $\left[1 , 5\right[$ que é igual a 5. (Falso)

10.1 a) Existe pelo menos um ser vivo que esteve na Lua.

b) Todo o número inteiro é igual ao seu dobro.

10.2 A proposição de 10.1 a) é verdadeira.
A proposição de 10.1 b) é falsa.

10.3 Proposição de 10.1 a)
$\forall x \in H,\ x$ não esteve na Lua.
Proposição de 10.1 b)
$\exists x \in \mathbb{Z},\ x \neq 2x.$

11.1 a) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z},\ y < x.$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x < y.$

11.2 A proposição de 11.1 a) é verdadeira.
A proposição de 11.1 b) é falsa.

12.1 Falso.

12.2 Verdadeiro.

13.1 (a) O produto de dois números reais existe sempre e é único.
(b) Propriedade comutativa.
(c) Propriedade associativa.
(d) Existência de elemento neutro.
(e) Existência de inverso em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.2 Verdadeiro.
Falso.

14.1 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$

14.2 $\exists u \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + u = u + x = x.$

14.3 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x = 0.$